Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
november

Euclides 3

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52[c], 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 48,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 29,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Vanuit Herkenning en Verbazing*

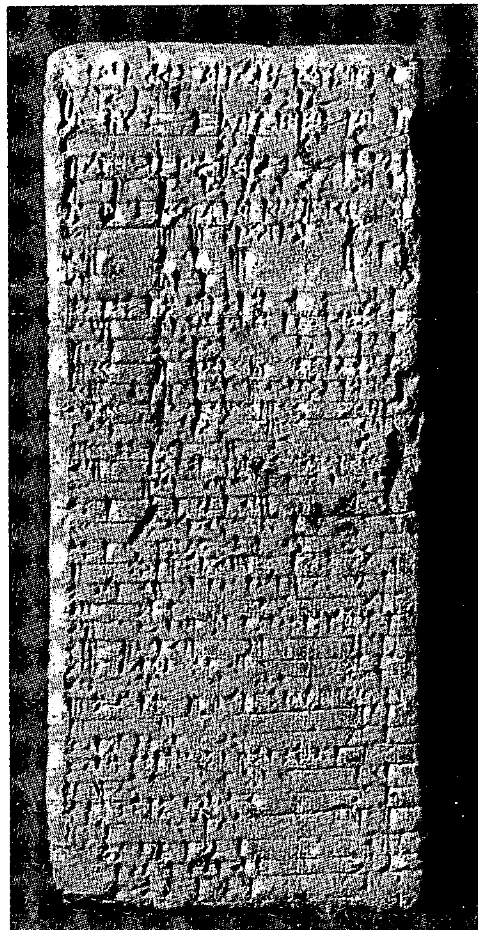
H. J. M. Bos

Herkenning en verbazing. – Deze twee ervaringen zijn essentiële drijfveren achter de belangstelling voor het verleden. Ik heb ze daarom als leidraad gekozen voor de presentatie van mijn vakgebied, de Geschiedenis van de Wiskunde, waartoe de aanvaarding van het ambt als buitengewoon hoogleraar mij vandaag de gelegenheid geeft.

Herkenning maakt het historische gebeuren bespreekbaar, en vormt zo het begin van de verbinding met het heden. Als die herkenning, de affiniteit, ontbreekt, dan zijn de vroegere gebeurtenissen nauwelijks historisch te beschrijven. Verbazing, anderzijds, is ook onmisbaar. Het onverwachte, het andere dat men tegenkomt, wekt nieuwsgierigheid en de verwachting dat er iets te ontdekken en te leren valt. Geschiedenis bedreven zonder die verbazing verarmt tot de mededeling van herkenbare zaken uit het verleden, die alleen afwijken van wat ons vertrouwd is doordat er een ander jaartal bij staat.

Laat ik dit illustreren met twee voorbeelden die bij mij die ervaringen sterk oproepen. Bij het eerste voorbeeld is dat vooral de herkenning. Het betreft een Babylonisch kleitablet[1] (zie Platen 1 en 2) dat in het Louvre museum wordt bewaard. Het dateert van omstreeks 1750 voor Christus. Het zal bij u wellicht niet meteen een reactie van herkenning te weeg brengen. De tekst bevat de oplossing van een wiskundige opgave. Er is sprake van een rechthoek met lengte, breedte en oppervlak. De som van lengte en breedte is 27; het verschil van lengte en breedte, opgeteld bij het oppervlak, levert 183. Gevraagd zijn de lengte en de breedte. Er zijn dus twee vergelijkingen met twee onbekenden. Wij lossen die op door eerst één onbekende te elimineren. Dat leidt ons tot een vierkantsvergelijking, waarvan wij de wortels vinden met de vertrouwde a,b,c-formule

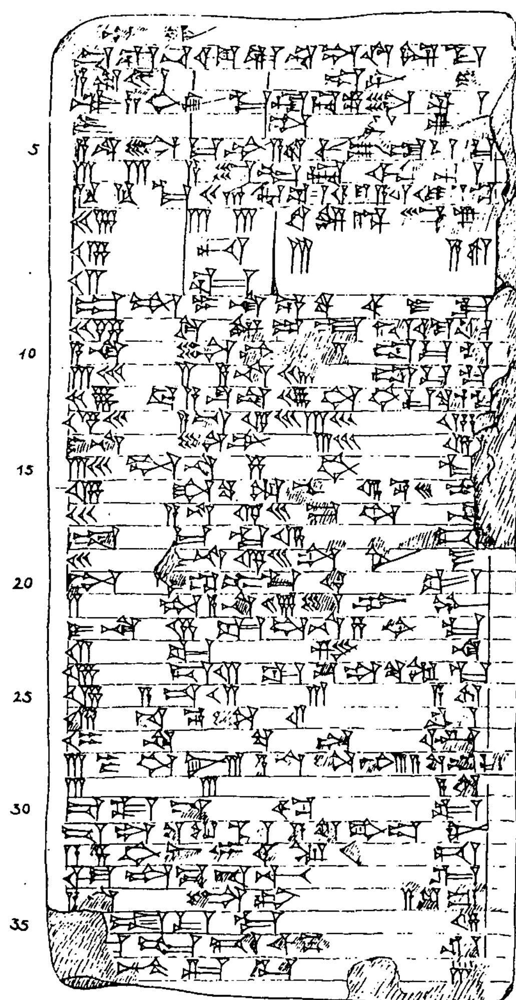
$$(1)\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Plaat 1. Babylonisch kleitablet met wiskundige tekst. Foto uit 'Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale', 29, (1932), Pl. I t.o. p. 4; zie noot 1.

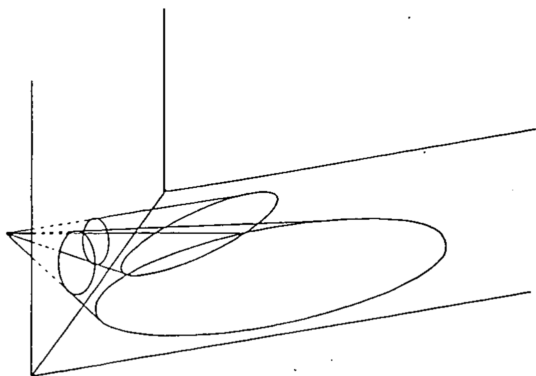
* Dit is de tekst van de rede die ik op 20 maart 1987 heb gehouden bij de aanvaarding van het ambt als buitengewoon hoogleraar in de Geschiedenis van de Wiskunde aan de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit te Utrecht. Ten opzichte van de separaat gepubliceerde tekst (Utrecht, OMI Grafisch Bedrijf, 1987) wijkt deze versie af doordat de aanhef en de persoonlijke woorden aan het slot zijn weggelaten. Ook zijn enige fouten verbeterd.

Welnu, vrijwel net zo gebeurde het zo'n 4000 jaar geleden. Weliswaar staat de formule niet op het kleitablet, maar de getallen die de Babyloniër in zijn berekening opschreef (en die niet eens zo moeilijk zijn te lezen[2]) zijn dezelfde als die men tegenkomt bij het invullen en uitwerken van de a,b,c-formule. De procedures komen precies overeen.
Dit tablet is, sinds Neugebauer het in 1935 opnam in zijn grote studie over wiskundige spijkerschrift teksten, bijna een gemeenplaats geworden in de geschiedenis van de wiskunde. Ik kom het dus vaak tegen en ik kan u verzekeren dat het nog steeds een sterke ervaring van herkenning in me teweeg brengt: De a,b,c-formule, quintessens van de schoolalgebra, ondanks bijna 4000 jaar tijdsafstand direct herkenbaar! Een stuk cultuur dat onberoerd door op- en ondergang van beschavingen vrijwel ongewijzigd is gebleven. Hoe oud ook, dit is zonder twijfel wiskunde. Freudenthal sprak in zijn inaugurele rede[3] over 5000 jaar internationale wetenschap; het is vooral de wiskunde die ons in de oudste teksten op klei wetenschap laat herkennen. En die herkenning is een heel indringende ervaring. Het is ook een uitnodiging om nader stil te staan bij die oude Babylonische wiskunde; maar ik zal dat nu niet doen en overgaan tot een tweede voorbeeld waarbij het mij vooral om de verbazing gaat.

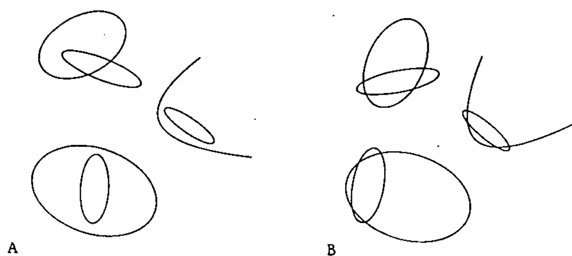


Plaat 2. Transcriptie van het tablet van Plaat 1; uit NEUGEBAUER, O., Mathematische Keilschrifttekste,' Berlin, 1935-37, dl 2, Pl. 35; zie noten 1 en 2.

Tijdens Napoleons Russische veldtocht in 1812 raakte de jonge genieofficier Jean-Victor Poncelet in krijgsgevangenschap. Achttien maanden verbleef hij in een kamp in Saratov, aan de Wolga. Hij vond afleiding in de wiskunde; in het bijzonder bestudeerde hij kegelsneden. Kegelsneden (zie Plaat 3) zijn beelden van cirkels onder projectie. Het schaduwbeeld dat een cirkel maakt op een vlak (een muur bijvoorbeeld) als het door een lichtbron beschenen wordt, is een kegelsnede; het vlak snijdt als het ware de schaduw uit de gevormde schaduwkegel. Poncelet keek naar beelden van paren cirkels. Plaat 4A toont een aantal beelden die men kan krijgen als men de twee cirkels (die in één vlak liggen) verschillende grootte en ligging geeft: een paar ellipsen bijvoorbeeld, of een ellips en een parabool; de twee beelden kunnen los van elkaar liggen, ze kunnen elkaar ook in twee punten snijden. Poncelet stelde zich de vraag: kan ik ieder mogelijk paar kegelsneden zo krijgen? Hij vond (zie Plaat 4) dat, zolang de twee kegelsneden niet meer dan twee snijpunten hebben, ze inderdaad zo verkregen kunnen worden. Dat is niet eenvoudig direct in te zien; Poncelet bewees het en het bewijs is lastig. Hij bemerkte ook dat bij vier snijpunten de zaak niet doorgaat. Dat is wel eenvoudig te begrijpen. Immers, het cirkelpaar dat als beeld twee kegelsneden met vier snijpunten zou hebben, zou zelf ook vier snijpunten moeten hebben, en dat kan niet bij cirkels.



Plaat 3. Twee cirkels in het verticale vlak worden vanuit een punt geprojecteerd op een ander vlak. De beelden zijn kegelsneden (in dit geval ellipsen).



Plaat 4. Paren kegelsneden, links met twee of minder snijpunten; deze kunnen verkregen worden als projectie van een cirkelpaar. Rechts zijn er vier snijpunten; deze kunnen niet verkregen worden als projectie van paren cirkels.

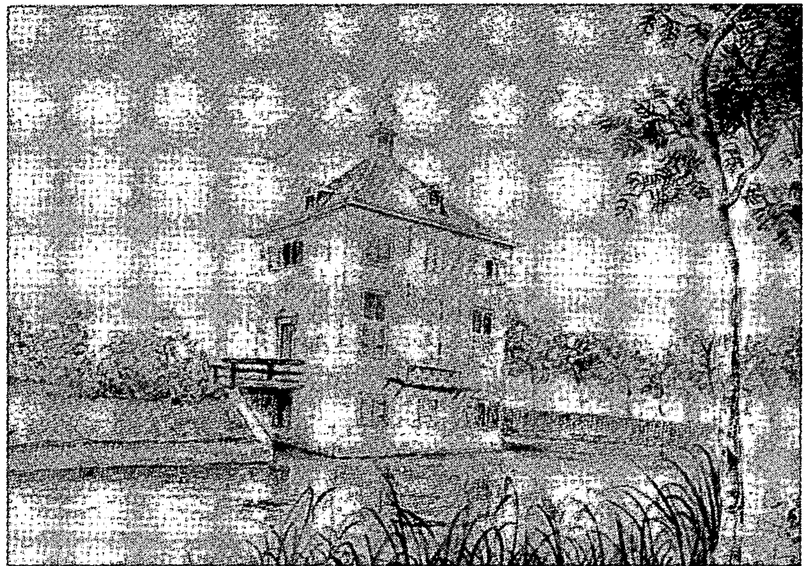
Poncelet zag zich dus geconfronteerd met een onmogelijkheid en dat was een tegenslag voor hem. De theorie waaraan hij werkte[4] zou namelijk veel eenvoudiger opgezet kunnen worden als ieder tweetal kegelsneden wèl projectief beeld was van een paar cirkels. Nu is zo'n situatie niet ongebruikelijk in de wiskunde en we zijn gewend aan een specifieke reactie van wiskundigen: als binnen het voorhanden systeem iets onmogelijk is, dan construeert men een nieuw, uitgebreid systeem waarin het wel kan. Als het vervelend is dat aftrekken niet altijd kan, 7 – 5 kan wel, 2 – 5 kan niet, dan breidt men het getalsysteem uit en schept nieuwe getallen, de negatieve. Als men vindt dat de wortel ook uit negatieve getallen getrokken moet kunnen worden voert men imaginaire getallen in en dan kan het wel. Als men wil dat evenwijdige lijnen een snijpunt hebben, net als niet-evenwijdige lijnen, dan introduceert men snijpunten 'in het oneindige'. Men zou dus verwachten dat Poncelet iets dergelijks deed. Hij had bijvoorbeeld een imaginair projectiepunt of imaginaire cirkels in kunnen voeren. Veel latere wiskundigen hebben zijn werk ook zo geïnterpreteerd, omdat ze zich bij het lezen lieten meeslepen door datgene waaraan ze gewend waren. Maar als men goed leest merkt men dat Poncelet dit niet deed. Hij breidde het object van de meetkunde, dus de ruimte, niet uit. Wat deed hij wel? Hij introduceerde een uitbreiding van de regels van het wiskundig redeneren. Hij zei: hoewel het onmogelijk is dat twee kegelsneden met vier snijpunten projectief beeld zijn van twee cirkels, mogen we toch redeneren alsof ze dat zijn. Poncelet legde deze uitbreiding van het wiskundig redeneren vast in een principe, zijn beroemde en beruchte 'Principe de Continuité'. Ik zal niet proberen dat principe hier algemeen te formuleren; Poncelet's eigen pogingen tot formulering bleven steeds vrij vaag. In het geval van de paren kegelsneden houdt het principe in dat men zegt: Omdat alle paren kegelsneden met twee of minder snijpunten beeld zijn van een paar cirkels, mogen wij redeneren alsof die eigenschap algemeen geldt (dus ook voor twee kegelsneden met vier snijpunten). Dit niettegenstaande het feit dat we weten dat dat gewoon niet waar is.

Nu, dat is verbazend. Het is verbazend omdat het een manier van denken toont die in de wiskunde niet meer gebruikelijk is. Redeneringen moeten kloppen; ze mogen niet van evident foute veronderstellingen uitgaan. Poncelet zei dat dat wel kon – verbazing. Die verbazing is ook uitnodigend en het is een dankbare opgave om die uitnodiging aan te nemen. Als men namelijk Poncelet hierin serieus neemt en zijn Principe de Continuité aanvaardt als principe waarmee wiskundigen toen werkten en resultaten bereikten, komt men op het spoor van een manier van denken die in die periode meer voorkwam. Het was zelfs een vruchtbare manier van denken (want merkwaardig genoeg waren de stellingen die Poncelet met behulp van zijn principe afleidde wel vrijwel allemaal juist), die op interessante wijze aansloot bij filosofische stromingen in

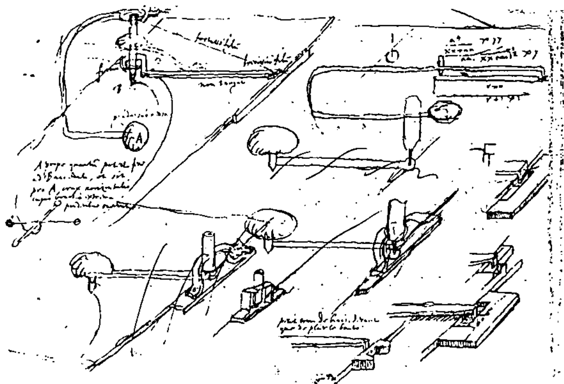
de late achttiende eeuw.[5] Al die aspecten ziet men pas als men zich openstelt voor de werking van de verbazing, en zich niet laat afleiden door wat men verwacht te vinden uitgaande van de veronderstelling dat het allemaal wel herkenbaar zal zijn.

Na deze twee korte voorbeelden wil ik graag wat dieper ingaan op een episode uit de geschiedenis van de wiskunde die deel uitmaakt van mijn tegenwoordig onderzoek. Ik kan er, hoop ik, iets mee laten zien van wat mij in dat onderzoek fascineert. De episode begon in het najaar van 1692 en wel in Voorburg of misschien in Den Haag. In Voorburg lag het buiten Hofwijck (zie Plaat 5). Het ligt er nog, eigenlijk niet meer dan een wat brede toren in een gracht, u kunt het op reis naar Den Haag vanuit de trein zien liggen. Waar vroeger de tuinen van het kasteeltje waren is nu het parkeerterrein van station Voorburg. Vanaf 1688 woonde Christiaan Huygens op Hofwijck, zij het dat hij in de wintermaanden de voorkeur gaf aan een appartement aan het Noordeinde in Den Haag. In 1692 was Huygens 63 jaar oud, zijn wetenschappelijke carrière goeddeels achter zich, maar nog zeer actief, zijn briefwisseling en zijn nagelaten manuscripten getuigen daarvan. Onder die manuscripten bevinden zich 10 bladen, gedateerd 29 October – 20 November 1692, van een wat ongewoon karakter.[6] De uitgevers van Huygens' *Œuvres Complètes* wisten er niet goed raad mee en besloten ze niet in extenso te publiceren; wel werden één samenvatting en enige karakteristieke citaten opgenomen.

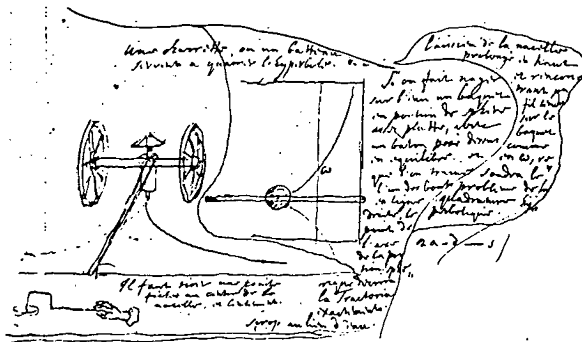
Ik meen dat deze manuscripten meer aandacht verdienen. Ze gaan over het mechanische proces van *slepen*. Huygens bestudeerde in het bijzonder de sleepbeweging die optreedt wanneer een zwaar lichaam langzaam over een horizontaal vlak gesleept wordt met behulp van een koord of een staaf, die er aan vast gemaakt is en waarvan het andere uiteinde langs een rechte lijn gevoerd wordt. De manuscripten tonen dat Huygens veel tijd en energie gaf aan het probleem om het sleepproces mechanisch uit te voeren, en wel op zo'n manier dat de baan van het gesleepte object zo precies mogelijk als een kromme op het horizontale vlak gemarkeerd wordt. Hij overwoog (zie Plaat 6) om een tekenspits met een gewicht te belasten en het geheel te slepen met een staaf; hij schetste allerlei manieren om het uiteinde van de staaf langs een rechte lijn te voeren. Het gewicht werd boven op de spits gelokaliseerd, of loodrecht eronder, verbonden via een beugel rond het tafelblad, blijkbaar om te zorgen dat de stift niet uit het lood werd geduwd door het



Plaat 5. Het buiten Hofwijck, tekening door Christiaan Huygens (Univ. Bibl. Leiden – Ms. Hug. 14, fol. 5r.).



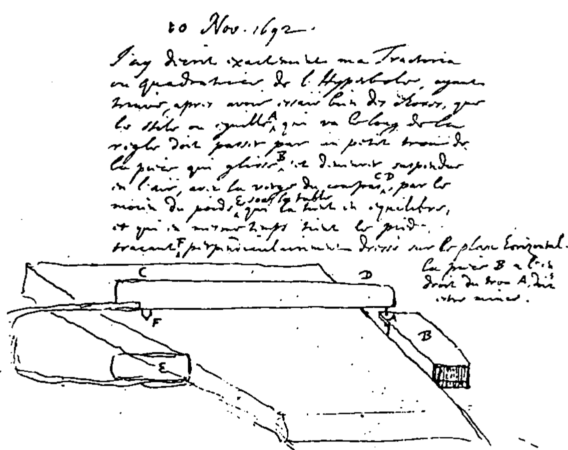
Plaat 6. Huygens' eerste schetsen voor het sleepinstrument (Univ. Bibl. Leiden, Ms Hug. 6, fol. 59r).



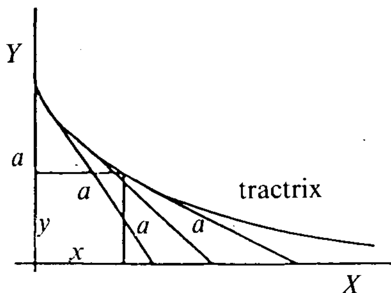
Plaat 7. Detail uit Huygens' manuscript over de sleepbeweging (Univ. Bibl. Leiden, Ms. Hug. 6, fol. 64r).

gewicht. We zien stelschroeven, om het vlak precies horizontaal te stellen. Huygens tekende ook (zie Plaat 7) een karretje dat rijdt over het oppervlak en daarbij de kromme tekent, en hij overwoog nog om het lichaam te laten drijven op een vloeistofoppervlak (voordeel: dat staat zeker horizontaal), hij dacht aan stroop (dat levert veel wrijving) of water. Plaat 8 toont het ontwerp dat Huygens uiteindelijk het best beviel; voor zover uit de stukken valt op te maken heeft hij het instrument ook inderdaad gemaakt en er de kromme mee getrokken. Toch bleef hij ook daarna nog naar alternatieven zoeken; hij werkte de mogelijkheid van slepen van drijvende lichamen verder uit, hij overwoog ook de wrijving van het lichaam te vergroten door het gebruik van een kolf die men verhit en die zich dan op het oppervlak vastzuigt, wat grote weerstand moet opleveren. Verder wijdde Huygens vele pagina's aan het exact horizontaal stellen van het oppervlak met behulp van een waterpas – een toen zeer recente uitvinding waarvoor Huygens nog terloops een controleprocedure uitwerkte. De horizontale stand van het vlak is noodzakelijk; stond het scheef dan zou de zwaartekracht een zijwaartse afwijking van de kromme veroorzaken. Huygens voerde de zorg over een eventuele zijwaartse afwijking zelfs zover dat hij opmerkte dat de aardse aantrekkingskracht niet langs parallelle lijnen werkt maar gericht naar het centrum der aarde, zodat er eigenlijk maar één punt van de tafel is waar de kracht werkelijk loodrecht op het vlak gericht staat.

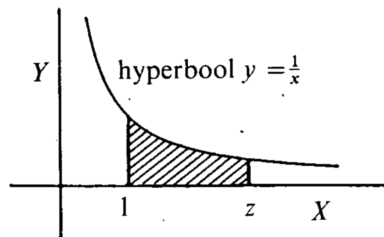
Wat gebeurt hier? Waarom ondernam Huygens deze studie? Ging het hem er om de sleepbeweging als natuurwetenschappelijk verschijnsel te beschrijven? Of om de sleepbeweging bruikbaar te maken voor enig praktisch doel? Ging het hem om de uiterste precisie? Nee, de belangrijkste motivatie lag elders. Om dat te verduidelijken moet ik eerst aangeven om welke kromme het hier gaat en welke wiskundige eigenschappen die kromme heeft. Huygens noemde de kromme die het gesleepte object beschrijft de *Tractoria*, later is de naam *Tractrix* meer gebruikelijk geworden. De definiërende eigenschap is dat het stuk van de raaklijn tussen as en kromme steeds constant is, het is namelijk de lengte van het koord waarvan het andere uiteinde langs de



Plaat 8. Huygens' definitieve schets van het sleepinstrument (Univ. Bibl. Leiden, Ms. Hug. 6, fol. 66r.).



Figuur 1



Figuur 2

as gevoerd wordt; door de wrijving volgt het lichaam steeds de richting waarin het koord trekt (zie Figuur 1). De differentiaalvergelijking waaraan de kromme voldoet is dus

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

en men leidt daaruit eenvoudig af dat de vergelijking van de kromme is:

$$(3) \quad x = a\log\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Huygens zelf beschreef de relatie tussen de coördinaten x en y van punten op de kromme niet met behulp van deze vergelijking. Hij onderkende die relatie wel, maar formuleerde hem in meer meetkundige termen. In het bijzonder onderkende hij het voorkomen van de logaritme. Die logaritme interpreteerde hij ook meetkundig, namelijk als wat hij noemt de 'quadratuur van de hyperbool'. Wij herkennen daarin de in de volgende formule weergegeven relatie:

$$(4) \quad \log z = \int_1^z \frac{dx}{x}.$$

Immers (zie Figuur 2) de integraal in het rechterlid beschrijft het oppervlak (de 'quadratuur') van het aangegeven vlakdeel onder de hyperbool met vergelijking

$$(5) \quad y = \frac{1}{x}.$$

Keren we nu terug naar de vraag naar Huygens' motivatie bij deze onderzoekingen. Wilde Huygens de sleepbeweging als natuurverschijnsel wiskundig beschrijven? Nee, daartoe zou de relatie van Formule (3) voldoende zijn, de verdere onderzoeking naar het precies trekken van de kromme is dan overbodig. Ook zien we geen praktisch doel gediend met al de verschillende manieren van slepen die Huygens onderzocht. Ging het dan om precisie bij het beschrijven der kromme? In zekere zin wel; Huygens legt er de nadruk op dat de kromme door de beweging zeer precies getrokken moet worden. Anderzijds kan dit niet de volledige motivatie zijn omdat Huygens een veel precieser en eenvoudiger middel om de kromme te trekken ter beschikking stond, namelijk logaritmentafels. Met behulp van zulke tafels zou hij uit de relatie van formule (3) de coördinaten van punten op de kromme kunnen bepalen met een nauwkeurigheid die met trekken op papier niet te verkrijgen is. Zo het al om precisie ging bij Huygens dan was het niet een praktische precisie maar een ideële.

Laten we, om na te gaan wat er dan wel achter Huygens' inspanningen zat, onderzoeken wat hij zelf over de motivatie van zijn onderneming noteerde. Hier zijn enkele karakteristieke citaten. In het eerste vergelijkt hij zijn instrument met de klassieke meetkundige instrumenten passer en liniaal:

'Men moet toegeven dat, wanneer mijn kromme verondersteld of gegeven is, men de quadratuur van de hyperbool heeft. Als ik dus enig middel vind om hem even exact te beschrijven als men met een gewone passer een cirkel beschrijft, heb ik dan niet die quadratuur gevonden? (-) Weliswaar heb ik nodig dat een vlak evenwijdig aan de horizon geplaatst wordt, maar dat is mogelijk, niet in alleruiterste precisie, maar zoals een liniaal recht is. Voor het overige beschrijf ik mijn kromme met vrijwel evenveel gemak als een cirkel en de machine die ik gebruik komt wat eenvoud betreft dicht bij een passer."[7]

Bij zijn eerste schets van het lichaam dat over een vloeistofoppervlak gesleept wordt (zie Plaat 7) noteert hij dat die constructie

'het probleem van de hyperbolische quadratuur zal oplossen';[8]

en bij de tekening van het karretje op hetzelfde vel:

'Een karretje of een bootje kan gebruikt worden om de hyperbool te quadreren".[9]

We concluderen dat Huygens' tractrix niet diende als wiskundig model om de sleepbeweging te beschrijven maar omgekeerd: de sleepbeweging hielp Huygens de tractrix wiskundig in handen te krijgen, en daarmee de hyperboolquadratuur en alle andere meetkundige problemen die daarvan afhangen.

Waarom was dat nodig? Omdat blijkbaar de hyperboolquadratuur (wij zouden zeggen, de logaritme-functie) niet als echt bekend werd beschouwd en omdat een kromme als de tractrix voorheen niet zonder meer goed genoeg was om in de meetkunde te dienen als oplossing van problemen, Wie bepaalde nu zoiets? In dit geval was dat Descartes. Descartes had zo'n vijftig jaar eerder zich heel nadrukkelijk uitgesproken over wat wel en wat niet aanvaardbaar was in de meetkunde. Krommen waren aanvaardbaar als ze, in de nieuwe analytische meetkunde die Descartes invoerde, vergelijkingen hadden die algebraïsch waren, dat wil zeggen, als er in die vergelijkingen geen andere bewerkingen dan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen voorkwamen. De tractrix heeft niet zo'n vergelijking, het is een transcendente, dat wil zeggen niet-algebraïsche kromme. Huygens had ook onderkend dat voor zijn kromme geen algebraïsche vergelijking op te schrijven was en dat dus binnen de Cartesiaanse afgrenzing van de meetkunde de kromme niet acceptabel was. Daar verzette hij zich tegen.
Overigens, toen Descartes de bovengenoemde begrenzing van de meetkunde stelde was dat niet een beperking van het vak maar een uitbreiding. Vóór Descartes werden de grenzen, voorzover ze precies werden omschreven, veel enger getrokken. Maar Huygens voelde de bredere omgrenzing die Descartes had opgesteld alweer als te eng. Hij noteerde dat al op een der eerste bladen van zijn studie:

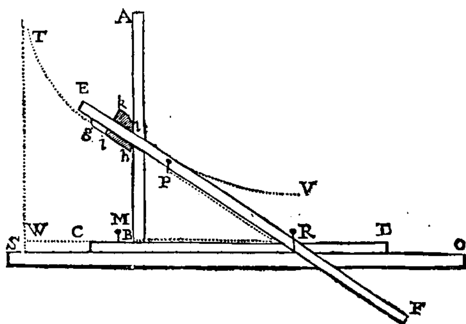
'Ten onrechte verwierp Descartes in zijn meetkunde krommen welker natuur hij niet met een vergelijking kon weergeven. Hij had er beter aan gedaan toe te geven dat zijn meetkunde daar nog een beperking had en ontoereikend was voor de behandeling er van.'[10]

Dat het Huygens vooral er om ging het predicaat 'geometrisch' te verlenen aan zijn kromme blijkt ook uit de publikatie die hij een jaar later aan de kromme wijdde. Hij legde daarin de sleepbeweging uit (hoewel zonder expliciete beschrijving van het instrument) en schreef:

'Als deze beschrijving, die naar de wetten der mechanica exact moet zijn, als geometrisch aanvaard zou kunnen worden, evenals de beschrijving van kegelsneden met instrumenten die men daarvoor heeft, dan had men daarmee zowel de quadratuur van de hyperbool als de perfecte constructie van alle problemen die gereduceerd kunnen worden tot die quadratuur.'[11]

En in een brief aan Leibniz uit deze tijd merkte Huygens enigszins ongerust op dat Bernoulli twijfels had uitgesproken over de 'geometricité' van de kromme.[12]

Het ging Huygens dus niet louter om het maken van een precisie-instrument; het ging hem om het verleggen van de grenzen van de zuivere meetkunde. Nu, dat geeft genoeg reden tot verbazing: een mechanische legitimatie binnen de wiskunde? De grenzen van zuivere meetkunde verleggen met gewichten, waterpassen, karretjes en zelfs stroop? De verbazing is uitnodigend, laten we ons verder verdiepen in de achtergrond van deze denkwijze.
Daartoe stellen we allereerst vast dat het niet zomaar een persoonlijke eigenaardigheid van Huygens was om op deze knutselende, doe-het-zelf manier het probleem te benaderen. Het motief van de sleepbeweging als mechanische legitimatie van transcendente krommen duikt in de periode van de vroege differentiaal- en integraalrekening herhaaldelijk op. Geen centraal thema in de ontwikkeling van de wiskunde, maar een vaak tussengeweven motief, zeker herkenbaar en vertrouwd voor tijdgenoten. Huygens publiceerde zijn ideeën in 1693.[13] Ze werden meteen opgenomen door Leibniz, die, karakteristiek, meedeelde dat hij al eerder op hetzelfde idee was gekomen en een schets gaf van een gegeneraliseerde sleepmachine waarmee allerlei differentiaalvergelijkingen opgelost zouden kunnen worden.[14] Een zekere John Perks bedacht een



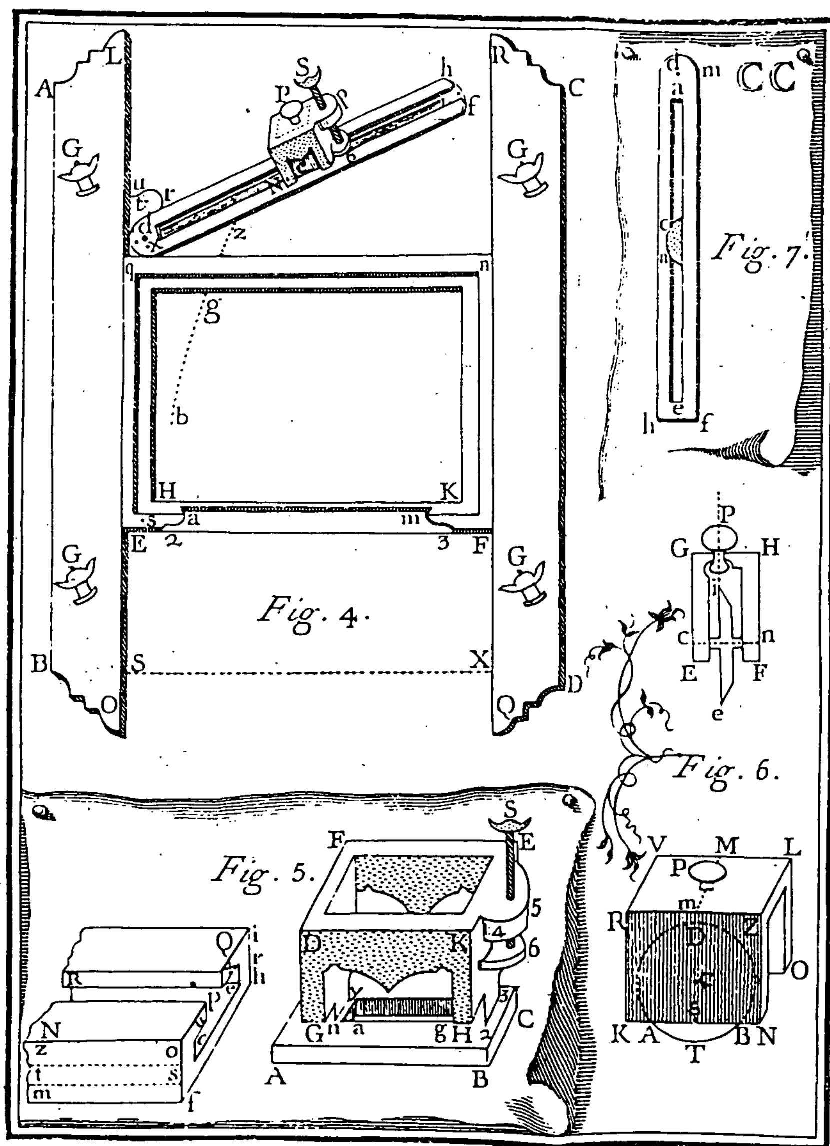
Plaat 9. John Perks' sleepinstrument voor de hyperboolquadratuur (zie noot 15).

sleepinstrument (zie Plaat 9), waar de wiskundige De Moivre blijkbaar genoeg in zag om een artikel erover van Perks te laten plaatsen in de *Philosophical Transactions* van 1706 onder de titel 'Nieuwe quadratrix van de hyperbool'.[15] In 1728 nam de Italiaanse geleerde Poleni het onderwerp weer op. Hij ontwierp een sleepinstrument (zie Plaat 10) en zond exemplaren naar drie collega's, met het argument, alweer, dat door dat instrument nu eindelijk de hyperboolquadratuur meetkundig aanvaardbaar opgelost was. Zijn correspondenten reageerden positief. Een van hen, Jacopo Riccati, greep de gelegenheid aan om zijn mening over de rol van constructies in de zuivere wiskunde uitvoerig op papier te zetten. Poleni publiceerde zijn onderzoek een jaar later, hij voegde de brieven der anderen als appendix toe.[16] Ook bij Euler[17] en in later werk van Riccati[18] vinden we het motief van de sleepbeweging terug. En steeds gaat het dan niet om de wiskundige beschrijving van de sleepbeweging, maar, omgekeerd, om de legitimatie van transcendente krommen als bruikbare oplossingen in de meetkunde.

Keren we terug naar Huygens. Hij stond dus niet alleen in zijn belangstelling voor de sleepbeweging in verband met de vraag naar de rechtmatige grenzen van de meetkunde. Onze eerste verbazing heeft ons geleid naar aspecten van vroegere wiskunde die we niet meer zo goed herkennen. Laten we proberen deze voor ons ongebruikelijke denkwijze verder te analyseren om te zien wat we op het spoor zijn gekomen.
Huygens deed dus in een zeer letterlijke, maar niet de nu gebruikelijke, betekenis van de term, grensverleggend onderzoek. Het ging er om grenzen, die eerdere wiskundigen aan de meetkunde hadden gesteld, te verleggen, zekere objecten die eerder buiten de meetkunde werden gehouden als meetkundig aanvaardbaar te legitimeren. Daarbij greep Huygens terug op de mechanische verbeelding, aansluitend bij de klassieke constructie instrumenten van de meetkunde, passer en liniaal.
Die legitimatie had een specifieke functie: een gelegitimeerd object kon als oplossing gelden. Huygens meende dat zodra de tractrix gelegitimeerd was als aanvaardbaar meetkundig object, het probleem van de hyperboolquadratuur opgelost was en daarmee ook alle andere problemen die op de hyperboolquadratuur teruggevoerd konden worden.
De legitimatie betreft de structuur van de wiskundige onderneming: door zekere objecten te legitimeren maakt men zekere problemen oplosbaar die dat voordien niet waren. Het gaat dus om een cruciale vraag in de wiskundige activiteit: wanneer mag ik een probleem als opgelost beschouwen? Wanneer mag ik een object als voldoende bekend beschouwen? Wat zijn de criteria voor oplossing en kennis binnen de wiskunde, in dit geval de meetkunde? Het debat over legitimatie is eigenlijk het debat waarin deze criteria worden gezocht. Dat debat beperkte zich zeker niet tot het thema van de sleepbeweging dat ik als illustratief voorbeeld heb gebruikt. We vinden vergelijkbare discussies in allerlei onderdelen van de wiskunde; in de vroeg moderne meetkunde, bij Descartes, bij de invoering van de algebra in de meetkunde, bij de infinitesimaalrekening, bij de invoering van transcendente krommen. Al die vernieuwingen werden als het ware begeleid door discussies over de vraag: wanneer is een probleem opgelost, wanneer kennen we een object werkelijk? Op dit punt moeten we natuurlijk wel een voor de hand liggende tegenwerping verwachten: hebben wiskundige problemen niet gewoon een oplossing? Een antwoord, een getal of een bewijs dat goed of fout is? Voor goed of fout is toch geen ingewikkelde legitimatie nodig? Het antwoord is nee, zo eenvoudig ligt de zaak niet. Wiskunde is een exacte wetenschap, dat zeker, maar over de vraag wat exact betekent moet wel eerst onder de beoefenaren van de wiskunde een consensus bereikt worden. Dat kan niet op een willekeurige manier; het wiskundig object legt sterke beperkingen op, maar het blijft een consensus. Die consensus groeit en verandert in

de loop der tijd. De episode van de sleepbeweging is dus interessant omdat we hier dat proces kunnen bestuderen. We zien hoe wiskundigen inhoud proberen te geven aan het begrip exactheid. Door de tractrix te legitimeren wordt het begrip exacte meetkundige oplossing verbreed zodat het probleem van de hyperboolquadratuur oplosbaar wordt. Het proces is niet voltooid; later zijn de ideeën over exactheid binnen de wiskunde weer verschoven. Maar dat maakt het proces dat we hier kunnen bezien niet minder belangrijk.

Het ging dus om de vraag: wanneer is een probleem opgelost? Wanneer is een object voldoende bekend? Die vraag speelde niet alleen bij de hyperboolquadratuur en de tractrix, hij werd telkens weer gesteld en besproken in de periode van de vroeg moderne wiskunde. Het is verhelderend te bestuderen wat wiskundigen over die vraag schreven. Zo'n studie helpt in het begrijpen van de beelden en de terminologie in de wiskundige teksten, zoals het feit dat krommen niet worden omschreven door hun vergelijkingen maar door vaak



Plaat 10. Poleni's sleepinstrument (zie noot 16).

zeer gecompliceerde geometrische constructieprocedures. Of het feit dat men tot ver in de achttiende eeuw sprak van het construeren van differentiaalvergelijkingen waar wij zouden zeggen het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Ook een aantal op het eerste gezicht curieuze aspecten en ontwikkelingen in de wiskunde vallen door deze studie in een begrijpelijk patroon. Dat kan kleinere zaken betreffen, zoals de fascinatie met de sleepbeweging, en bijvoorbeeld de merkwaardige voorkeur van een aantal wiskundigen rond 1700 om integralen niet als oppervlakten maar als booglengten te interpreteren. Het kan ook bredere ontwikkelingen betreffen, zoals het geval van de theorie van de 'constructie van vergelijkingen' die gedurende meer dan een eeuw een vrij belangrijke plaats in de wiskunde innam en daarna binnen korte tijd volledig verdween.

Toch blijven de argumenten over de vraag wanneer een probleem is opgelost in zekere zin ongrijpbaar en onwezenlijk. Ongrijpbaar omdat de vraag principieel onbeslisbaar is; men kan dus desgewenst eeuwig van mening blijven verschillen. En onwezenlijk omdat men een gemis ervaart in diepgang en kwaliteit van de argumenten. Eigenlijk zit dat toch achter de verbazing over Huygens' geknutsel met schuifgewichten, karretjes en stroop, het lijkt zo mager. Er zijn andere voorbeelden te noemen, zoals Leibniz' serieus bedoelde voorstel om geen logaritmentafels op zeereizen mee te nemen, maar een ketting die men vrij hangt voor grafiekenpapier zodat men, met wat wiskundige verdere kennis, de logaritmen kan aflezen.[19] Men komt veel quasi-praktische argumenten tegen van een soort dat men denkt: zou dat nou echt serieus bedoeld zijn? Dit brengt ons op een iets ander spoor. Het gaat namelijk ook eigenlijk helemaal niet om de argumenten, maar om het proces dat daar achter zit. De vraag was wanneer een wiskundig object voldoende bekend is om, zonder nadere bepaling, als oplossing van een probleem te gelden. Welnu, bekendheid is niet een objectieve zaak, maar een subjectieve. Wat nu bekend wordt geacht kan een generatie geleden nog als zeer problematisch zijn beschouwd. De logaritmische functie was voor Huygens bijvoorbeeld nog problematisch; latere onderzoekers laten hem zonder bezwaar in formule (3) staan. Intussen hebben zij niet essentieel meer over die functie geleerd dan Huygens. Ze hebben iets anders gedaan: ze zijn aan de functie gewend. Dat verklaart waarom de discussies na zeker tijd verstommen, waarom ze een legitimerende ondertoon hebben, waarom ze onbeslisbaar zijn en waarom de redeneringen soms zo mager lijken: hoe serieus bedoeld de argumenten ook zijn, waar het eigenlijk om gaat is het proces van gewenning dat er achter speelt. Zulke processen van gewenning speelden natuurlijk niet alleen in de wiskunde van de vroeg moderne periode, ze zijn algemeen. Ze zijn vrij weinig bestudeerd. Ik denk dat ze meer aandacht verdienen omdat ze interessant en belangrijk zijn. Zo mag dus het verhaal over de sleepbeweging ook gelden als illustratie van een soort processen in de wetenschapsontwikkeling waarover de studie van de Geschiedenis van de Wiskunde meer inzicht kan brengen.

Ik heb u een episode uit de geschiedenis van de wiskunde voorgelegd, die van de sleepbeweging en de tractrix. Ik heb de vragen genoemd die men, geprikkeld door verbazing, er aan verbinden kan, en de sporen waarop men gevoerd wordt als men die vragen gaat vervolgen. Het is maar een kleine episode, gelicht uit veel grotere ontwikkelingen. Ik hoop dat het verhaal toch verhelderend is geweest als illustratie van een benadering die men zou kunnen omschrijven als „Ideeëngeschiedenis van de Wiskunde". Die benadering richt zich vooral op de grondbegrippen van de wiskunde, en de ideeën, voorstellingen en vragen die daarover bij vroegere wiskundigen leefden. Dit is een onderdeel van de geschiedenis van de wiskunde waar ik me het meest thuis voel, ik meen ook dat het een zeer belangrijk onderdeel is van het vak; maar het is zeker niet het enige.
Het vak dat met deze buitengewone leerstoel een nadere universitaire bevestiging heeft gekregen, is veel breder. Het omvat een tijdsspanne van meer dan 5000 jaar. Culturen over de gehele aardbol hebben herkenbare wiskunde bedreven en aan de ontwikkeling van die kennis bijgedragen. Men kan zich in het historisch onderzoek van die ontwikkeling op ideeën en begrippen concentreren, maar er zijn ook heel andere benaderingswijzen mogelijk. Er is de sociale geschiedenis van de wiskunde – een aanpak die ik nu als vanzelfsprekend noem, me met enige verbazing herinnerend hoe ontstemd en ver-

ontrust er vijftien jaar geleden nog gereageerd werd op de verbinding van de woorden sociaal of maatschappelijk, en wiskunde. Er is de institutionele geschiedenis, en de meer biografisch gerichte aanpak. Er is de geschiedenis van de wiskunde in afzonderlijke culturen en landen, niet in de laatste plaats de wiskunde in Nederland. Men kan ook zeer vruchtbaar de geschiedenis van de wiskunde bestuderen binnen het bredere kader van de wetenschapsgeschiedenis. Men vervolgt dan het functioneren van de wiskunde binnen het streven van mensen om de natuur te begrijpen en te beheersen, de successen en tegenslagen daarbij en de opeenvolging van stijlen, stromingen, -ismen, revoluties en normale periodes die men in de lange geschiedenis van dat streven onderkent. Ik meen dat al deze benaderingen zeer zinvol zijn, en dat ze in het onderwijs een plaats kunnen krijgen voorzover tijd, vaardigheid en belangstelling van de studenten dat toelaat.
Voor onderzoek moet men natuurlijk sterker rekening houden met beperkingen van tijd en vaardigheid. Mijn persoonlijke keuze van onderzoeksthema's ligt op het terrein boven omschreven als ideeëngeschiedenis van de wiskunde. Dat is omdat me dat ligt, niet omdat dat de beste benadering van het wiskundig verleden zou zijn.

Er blijft nog een zeer belangrijke vraag te noemen: waar gaat het eigenlijk om bij de geschiedenis van de wiskunde? Wat is het object dat onderzocht wordt en waarover wordt onderwezen? Is het de wiskunde zoals die in het verleden voorkwam (en die nu dus dood is)? Nee, die formulering miskent het belang van verbazing en herkenning. Verbazing en herkenning verwijzen ernaar dat geschiedenis wordt bedreven door en geschreven voor mensen die nu leven. Het object beschouwen zonder die relatie met het heden te overwegen is misleidend, men kan bij het denken over het verleden het heden niet uitschakelen.
En hier duikt de bekende metafoor op van geschiedenis als collectieve herinnering; die metafoor bevredigt mij het meest bij de beantwoording van de vraag waar het om gaat. Geschiedenis van de wiskunde is geschiedenis en dus onderdeel van de collectieve herinnering van onze cultuur. Zo past het vak, samen met de wetenschapsgeschiedenis, in de algemene geschiedenis. Daar neemt het echter een bescheiden hoekje in, dat ook nog weinig toegankelijk is omdat het oproepen van die herinnering toch wel enigszins intensieve ervaring met wiskunde vooronderstelt.

Geschiedenis van de wiskunde is echter ook, en meer in het bijzonder, de collectieve herinnering van de gemeenschap van wiskundigen. Ik geloof dat hier het primaire belang van het vak ligt en daarmee ook het antwoord op de vraag waar het eigenlijk om gaat. Net als voor mensen en voor naties, is het voor een wetenschapsgebied, een gemeenschap van vakgenoten, belangrijk om herinneringen serieus te nemen, het eigen verleden niet te verdringen, zo nodig half vergeten zaken op te diepen uit de herinnering, en in elk geval niet het eigen verleden af te doen als onbelangrijk, onvolwassen of onrijp. Geschiedenis van de wiskunde helpt dus bij de zelfreflectie van een vakgebied. Ik geloof oprecht dat dat zeer belangrijk is. Ik hoop door mijn werk aan die zelfreflectie bij te dragen.

Noten

1 De tekst is beschreven in THUREAU-DANGIN, F., 'Le prisme mathématique AO 8862', *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale, 29* (1932), pp. 10, en in NEUGEBAUER, O., *Mathematische Keilschrifttekste,* Berlin, 1935-1937, dl 1, p. 113, dl 2, pl. 35. Zie Platen 1 en 2.

2 Getallen worden in de Babylonische wiskunde genoteerd met een zestigtallig positioneel stelsel, opgebouwd uit twee tekens: V en <. V staat voor 1, maar kan, afhankelijk van de positie, ook 60, 60 × 60, 60 × 60 × 60, of 1/60, (1/60) × (1/60), etc. betekenen. < staat voor 10 keer V, en betekent dus 10, of 600, of 1/6 etc. De interpretatie van de tekens hangt af van de context (in dit geval de oplossing van de vergelijkingen). De meeste regels op het tablet beginnen (links) met een getal. Die getallen zijn: r. 6: 183; r. 8 (onder elkaar): 27, 15, 12; r. 9: 27; r. 11: 210; r. 12: 29; r. 13: $14\frac{1}{2}$; r. 15: 210; r. 16: $\frac{1}{4}$; r. 17: $\frac{1}{2}$; r. 19: $\frac{1}{2}$; r. 21: 2; r. 23: 12; r. 24: 15; r. 25: 15; r. 26: 15; r. 28: 3; r. 29 183. Als men deze getallen geïdentificeerd heeft is het niet meer moeilijk de overige getallen in de tekst op te sporen. Het zijn: r. 8: 183, 180; r. 11: 2, 27 (niet geheel leesbaar); r. 12: 29; r. 13: $14\frac{1}{2}$, $210\frac{1}{4}$; r. 14: $210\frac{1}{4}$; r. 16: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$; r. 17: $14\frac{1}{2}$; r. 18: 15; r. 19: $14\frac{1}{2}$; r. 20: 14 (niet geheel leesbaar); r. 21: 27; r. 22: 14; r. 24: 12; r. 25: 12, 180; r. 26: 12; r. 28: 3, 180.

3 FREUDENTHAL, H., *5000 Jaren internationale wetenschap* (rede Utrecht 9-12-1946), Groningen, 1946.

4 Die theorie betrof eigenschappen van paren kegelsneden, in het bijzonder de eigenschap die beschreven is in de 'Sluitingsstelling van Poncelet'. Verdere details over het hier vermelde in BOS, H. J. M., KERS, C., OORT, F. & RAVEN, D. W., 'Poncelet's closure theorem', de verschijnen in *Expos. Math.*

5 Vergelijk DASTON, L.J., 'The physicalist tradition in early nineteenth century French geometry', *Stud. Hist. Phil. Sci., 17* (1986), pp. 269-295.
6 Univ. Bibl. Leiden, Ms. Hug. 6, ff. 59r-68r. Samenvatting en enkele citaten in HUYGENS, C., *Œuvres Complètes, 10*, pp. 409-413.
7 Fol. 62r, ook geciteerd in HUYGENS, C. *Œuvres Complètes 10*, p. 412, noot. Huygens schreef in het Latijn en het Frans. Hier en in de volgende citaten zijn de vertalingen van mij.
8 Fol. 64r, ook geciteerd in *Œuvres, 10*, p. 411, noot.
9 Fol. 64r.
10 Fol. 60v.
11 'Lettre de Mr Huygens à l'Auteur', *Hist. Ouvr. des Sav.*, Febr. 1693, pp. 244 e.v., *Œuvres, 10*, pp. 407-417, citaat p. 411.
12 Huygens aan Leibniz, 17-9-1693, *Œuvres, 10*, pp. 509-512, citaat p. 510.
13 Zie noot 11.
14 LEIBNIZ, G.W., 'Supplementum geometriae dimensoriae' *Acta Eruditorum* 1693 (September); in *Mathematische Schriften* (ed. C.I. Gerhardt, Berlin, 1849-63) dl 5, pp. 294-301.
15 PERKS, J., 'The construction and properties of a new quadratrix to the hyperbola', *Phil. Tr.* (1706, # 306).
16 POLENI, Joh. *Epistolarum mathematicarum fasciculus*, Padua, 1729, brief nr. 7.
17 EULER, L., 'De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus', *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 8* (1736/1741) pp. 66-85; in EULER, L. *Opera Omnia* Ser 1, vol. 22, pp. 83-107.
18 RICCATI, Vincenzo, *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium*, Bologna 1752.

Ik ben de Universiteitsbibliotheek te Leiden erkentelijk voor de toestemming om gedeelten uit Huygens' manuscripten te reproduceren.

Mededelingen

Wintersymposium

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap heeft deze keer als thema: '*Wiskunde en Informatica*'. Het symposium wordt gehouden op zaterdag 9 januari 1988 in het gymnasium Johan Van Oldenbarnevelt, Groen van Prinstererlaan 33, 3818 JN Amersfoort.

Het programma is als volgt:
10.00-11.00 dr. P. van Emde Boas (Universiteit van Amsterdam) Van Wiskunde naar Informatica: *Verzamelingenmanipulatie op de computer.*
11.15-12.15 prof. dr. J. van Leeuwen (Rijksuniversiteit Utrecht) *Van Informatica naar Wiskunde: Asynchroniteit en netwerk protocollen.*
13.30-14.30 G.A. Vonk (Rijksuniversiteit Utrecht) *Wiskunde en Informatica: Beïnvloeding over en weer.*
U kunt zich voor dit symposium uitsluitend schriftelijk opgeven bij J.W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ 's-Gravenhage. Op verzoek kunt u een prospectus met samenvattingen van de voordrachten thuisgestuurd krijgen. Deze prospectussen zullen begin december naar de scholen worden gestuurd. Indien u wilt deelnemen aan de gezamenlijke lunch, stort u *f* 10,– op girorekening 608077, t.n.v. J.W. Maassen, 's-Gravenhage, onder vermelding 'lunch wintersymposium'.

Landelijke contactgroep ibo-rekenen/wiskunde

Een aantal instanties en personen houden zich bezig met rekenen en wiskunde in het voortgezet onderwijs. Sommige doelgroepen krijgen daarbij min of meer speciale aandacht.
In de onderbouw krijgen leerlingen in het ibo minder aandacht dan, gezien de door docenten gesignaleerde problemen, nodig is. Onder andere op het gebied van leermiddelen schijnt er nog heel wat te verbeteren te zijn. De grote diversiteit in deze doelgroep t.a.v. leermiddelen maakt de problemen alleen maar groter. Daarom heeft een aantal personen besloten een contactgroep te formeren, op 22 september 1987, om te bekijken of er gezamenlijk aan het gebied ibo-rekenen/wiskunde effectiever aandacht besteed kan worden. Op dit moment hebben in deze landelijke contactgroep zitting: Dolly van Drooge (SiO-leermiddelenkader wiskunde), Willem van Gaans (SiO-leermiddelenkader), Bart van der Krogt (SiO-schoolondersteuningskader, KPC), Sjoerd Schaafsma (SiO-nascholingskader) en Henk Sissing (Pedagogische Technische Hogeschool, SLO).
Mocht u als lezer interesse hebben om in deze werkgroep te participeren of anderszins een bijdrage te leveren dan kunt u dat kenbaar maken aan Willem van Gaans (KPC, Postbus 482, 5201 AL 's-Hertogenbosch).

Kort-antwoordvragen*

Bert Zwaneveld

Inleiding

Onderwijs en het toetsen van gegeven onderwijs door middel van bijvoorbeeld een proefwerk zijn al zo oud als de weg naar Rome.
Bij wiskundeonderwijs is de open vraag van oudsher de gebruikelijke vraagvorm. Een open vraag is een vraag waarbij de leerling zelf zijn antwoord moet formuleren en zelf de weg moet kiezen waarlangs hij tot zijn antwoord komt. De gekozen oplosmethode blijkt dan uit de beantwoording, de uitwerking of de toelichting op het antwoord. Bij de beoordeling worden zowel het antwoord als de uitwerking of toelichting in de overweging betrokken.
Op een gegeven moment, dat is al wat jaren geleden, kwamen er toetsen met meerkeuzevragen. Men vond dat de toetsen objectief scoorbaar moesten zijn, dat wil zeggen: degene die het werk nakijkt en beoordeelt, mag op geen enkele wijze zijn persoonlijke mening een rol laten spelen. Omdat bij een meerkeuzevraag slechts een van de alternatieven goed is kan de scoring volstrekt objectief, zelfs door een machine gebeuren.
Een bijkomend voordeel was en is dat dat nakijken snel gedaan is.
Omdat wij een aantal bezwaren hebben tegen het gebruik van meerkeuzevragen in het wiskundeonderwijs – verderop zullen we dat toelichten – hebben we naar een alternatief voor de meerkeuzevragen gezocht. Wij menen dat gevonden te hebben in de kort-antwoordvragen. Hiermee bedoelen we gewone open vragen, die echter redelijk snel te beantwoorden zijn, bijvoorbeeld omdat ze kort routineachtige vaardigheden vragen. Deze kort-antwoordvragen worden met goed/fout beoordeeld. Naar de uitwerking of toelichting op het antwoord wordt bij het nakijken niet gekeken.
De hier genoemde 'wij' zijn Thijs Jansen, Evert van de Vrie en de auteur. Wij zijn bij de Open Universiteit (een rijksinstelling voor hoger en wetenschappelijk afstandsonderwijs) verantwoordelijk voor de cursussen wiskunde.
Omdat met kort-antwoordvragen slechts een beperkt aantal doelen van wiskundeonderwijs getoetst wordt, zullen de tentamens wiskunde van de Open Universiteit bestaan uit een aantal kort-antwoordvragen en een aantal "echte" open vragen, open vragen waarbij ook de manier waarop het antwoord verkregen is, meebeoordeeld wordt.

Drie bezwaren tegen meerkeuzevragen

Ons *eerste* en belangrijkste bezwaar is dat belangrijke doelen van wiskundeonderwijs met meerkeuzevragen niet te toetsen zijn.

a Het oplossen van een vergelijking of ongelijkheid
Elke leerling moet een vergelijking als $z^2 - x - 6 = 0$ rechtstreeks kunnen oplossen. Zo kom je ze nu eenmaal tegen en niet in de vorm van een meerkeuzevraag, waarbij je bijvoorbeeld via substitutie drie van de vier alternatieven kunt wegstrepen.

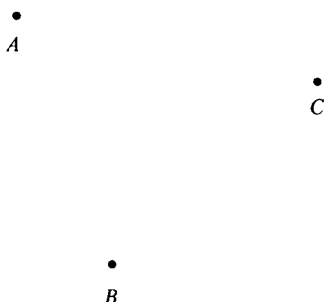
b Het tekenen van de grafiek van een functie
Dit kan gewoon niet met een meerkeuzevraag getoetst worden.

c Het oplossen van een ingekleed vraagstuk, door het eerst als een (bekende) wiskundige vraag te herformuleren, die vraag correct te beantwoorden en het antwoord in termen van het oorspronkelijke probleem te interpreteren.

Voor het volgende probleempje is geen vraagstelling in meerkeuzevorm mogelijk:
Er is een bootje met drie opvarenden vergaan. In paniek zijn ze in drie verschillende richtingen weg-

* *Artikel gebaseerd op een voordracht gehouden op de conferentie 'Toetsen, Eindtermen en Opvattingen over wiskundeonderwijs', vrijdag 27 maart 1987, Noordwijkerhout.*

gezwommen. Op een gegeven moment zijn A, B en C hun posities.
Waar is hun bootje vergaan?



(Neem aan dat ze alle drie met dezelfde snelheid zijn weggezwommen.)

Er zijn dus (belangrijke) doelen die niet met meerkeuzevragen zijn te toetsen. Het zou kunnen zijn dat sommige doelen goed met meerkeuzevragen te toetsen zijn. Dan komt het probleem van het opstellen van een meerkeuzevraag. En dit is ons *tweede* bezwaar: het construeren van een meerkeuzevraag is lastig, het kost in ieder geval meer tijd dan het opstellen van de overeenkomstige open vraag.
De problemen bij het maken van meerkeuzevragen zijn de volgende:

- Hoe voorkom je dat in de alternatieven informatie zit die de leerling kan gebruiken om tot het goede antwoord te komen? Lukt dit niet dan weet je als leraar niet meer wat je toetst: heeft de leerling die het goede antwoord geeft het nu begrepen of is hij alleen maar goed in het beantwoorden van dit speciale type vragen? Je toetst niet wat je moet toetsen.
- Hoe kom je aan goede alternatieven? De meest gebruikte methode hierbij is in de alternatieven de meest voorkomende leerlingenfouten op te nemen. Maar wat doe je bij een vierkeuzevraag als er maar twee alternatieven zijn? Het derde alternatief is dan natuurlijk een slecht alternatief. Resultaat: in wezen een driekeuzevraag of een vraag die de leerling in de war brengt.

Het volgende voorbeeld, ontleend aan het mavo-C-examen van 1986 illustreert een en ander.

Op de grafiek van de functie $x \rightarrow -2x + 3$ ligt het punt $(a, -5)$.
$a =$
A -7
B 1
C 4
D 13

Na enig puzzelen komen de volgende voor de hand liggende fouten naar voren:
(1) origineel en beeld verwisselen
(2) rekenfouten

Bij A: $-2 \cdot -5 + 3 = -10 + 3 = -7$ (1) en (2)
Bij B: $-2x + 3 = -5$
$-2x = -5 - 3$
$-2x = -2$ (2)
$x = 1$
Bij C: dit is het goede antwoord
Bij D: $-2 \cdot -5 + 3 = 10 + 3 = 13$ (1)

Maar een leerling die niet weet wat een grafiek is, niet weet wat 'ligt op' betekent, niet weet wat $(a, -5)$ voorstelt en op goed geluk de getallen -7, 1, 4 en 13 invult vindt alleen bij 4 als resultaat -5, als hij tenminste geen rekenfout maakt. Wordt hier getoetst wat de bedoeling is?

Ons *derde* bezwaar is van een enigszins andere orde. Hoewel dit ook bij andere vraagtypen aan de orde kan zijn is het heel sterk bij meerkeuzevragen aanwezig: het gokelement.
Nu zijn er allerlei manieren om hier iets tegen te doen. Zo wordt bijvoorbeeld de cesuur onvoldoende/voldoende zo gelegd dat er een correctie voor het aantal goedgegokte antwoorden is, of de eerste 10 goede antwoorden (van de 40 vragen) worden niet gesteld, of een combinatie van dit soort systemen. Een individuele leerling kan dit echter als oneerlijk ervaren. Iemand die niets weet en vaak gokt kan op hetzelfde resultaat uitkomen als een leerling die de vragen serieus maakt en een aantal keren miskleunt.

Voordelen van meerkeuzevragen

Natuurlijk is het niet alleen kommer en kwel met de meerkeuzevragen. Er zijn duidelijk twee voordelen

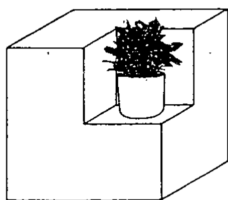
aan te wijzen voor meerkeuzevragen. Heb je de meerkeuzevragen tot je beschikking (en de kwaliteit is niet al te slecht) dan is er, zeker bij een groot aantal leerlingen een behoorlijke tijdwinst ten opzichte van open vragen.
Bij meerkeuzevragen met hun objectieve scoorbaarheid worden alle leerlingen op uniforme wijze beoordeeld. Daarom zal een kwaliteitsbewakende instantie als de overheid het gebruik van meerkeuzevragen bij examens bevorderen.

De kort-antwoordvragen

In de inleiding is al aangegeven wat wij onder kort-antwoordvragen verstaan. Bij kort-antwoordvragen gaat het om beperkte doelen. Het oplossen van een vergelijking kan heel goed als kort-antwoordvraag, het tekenen van de grafiek van een beetje ingewikkelde functie of het oplossen van een ingekleed probleem zal ook als kort-antwoordvraag niet of nauwelijks uit de verf komen. Vandaar onze keuze voor een tentamen dat zowel uit kort-antwoordvragen als 'echte' open vragen bestaat.
Hier wordt volstaan met een aantal voorbeelden van kort-antwoordvragen.

a Los de vergelijking $x^2 - x - 6 = 0$ op.
b Teken de grafiek van de functie $x \rightarrow x \sin x$ met domein $[0, 2\pi]$.
c Op de grafiek van de functie $x \rightarrow -2x + 3$ ligt het punt $(a, -5)$; Bereken a.
d Uit een kubus met ribbe 4 wordt een kubus met ribbe 2 gesneden. Het lichaam dat zo ontstaat wordt gebruikt als plantenstandaard. Bereken de totale oppervlakte van dit lichaam.
(En dus niet zoals in de oorspronkelijke versie van het mavo-C-examen, 1986

A	56
B	72
C	87
D	96



Vraagje voor de lezer: welke leerlingenfouten zijn in de alternatieven verwerkt?

Een inventarisatie van voor- en nadelen van meerkeuzevragen, kort-antwoordvragen en 'echte' open vragen

Met 'echte' open vragen worden hier bedoeld de open vragen waarbij naast het antwoord ook de uitwerking of toelichting een essentieel onderdeel van de beantwoording is, in tegenstelling tot de kort-antwoordvragen, die weliswaar gewone open vragen zijn, maar waarbij uitsluitend het antwoord met goed/fout beoordeeld wordt. In het overzicht is het woordje 'echte' echter weer weggelaten.
Hoewel het dus hierbij niet om elkaar uitsluitende typen vragen gaat worden ze in dit overzicht toch met elkaar vergeleken op een aantal punten om een overzicht van de voor- en nadelen van de verschillende typen te krijgen. Onderstaande inventarisatie is gedeeltelijk gebaseerd op een overzicht dat Kamps en Van Lint voor de wiskundetentamens van de Technische Universiteit Eindhoven hebben samengesteld.

1 Kunnen alle doelen van wiskundeonderwijs getoetst worden?
meerkeuzevragen: nee
kort-antwoordvragen: nee, maar wel meer dan met meerkeuzevragen
open vragen: ja
2 Zijn de vragen makkelijk op te stellen?
meerkeuzevragen: nee
kort-antwoordvragen: ja
open vragen: ja
3 Zijn de vragen makkelijk na te kijken?
meerkeuzevragen: ja
kort-antwoordvragen: ja
open vragen: nee
4 Zit in de vraag informatie over het goede antwoord verborgen?
meerkeuzevragen: vaak wel
kort-antwoordvragen: ja
open vragen: nee
5 Is een antwoordmodel nodig om beoordelaarseffecten te verkleinen, omdat meer mensen het werk nakijken?
meerkeuzevragen: een lijst met de goede alternatieven is voldoende
kort-antwoordvragen: een lijst met de goede antwoorden en eventuele alternatieve goede antwoor-

den als $x^2 + 2x$ en $x(x + 2)$ is genoeg
open vragen: ja

6 Kun je de door de leerling gevolgde gedachtengang achterhalen zodat je er als leraar adekwaat op kunt reageren?
meerkeuzevragen: nee
kort-antwoordvragen: nee
open vragen: ja

7 Is er een belangrijk gokelement?
meerkeuzevragen: ja
kort-antwoordvragen: nee
open vragen: nee

8 Beïnvloedt de vraagvorm het onderwijs nadelig doordat de leerling teveel op de beantwoording van dat soort vragen afgericht wordt?
meerkeuzevragen: ja
kort-antwoordvragen: nee, mits in combinatie met 'echte' open vragen
open vragen: ja, maar dat is juist de bedoeling

9 Hoe gebeurt het nakijken?
meerkeuzevragen: het kan door een niet-wiskundig geschoolde of een machine
kort-antwoordvragen: het kan door een niet-wiskundig geschoolde met een scoringsmodel eventueel door een machine, maar er moet een wiskundige achter de hand zijn voor de probleemgevallen
open vragen: een wiskundige

10 Hebben rekenfouten een grote invloed?
meerkeuzevragen: gering, omdat één antwoord altijd goed is
kort-antwoordvragen: veel ten opzichte van 'echte' open vragen.

Een paar opmerkingen bij deze lijst.
Gebruik je een toets met kort-antwoordvragen in je klas, dus bij een beperkt aantal leerlingen dan kun je overwegen ruimte voor een toelichting te geven, wanneer je alleen kijkt bij een foutief antwoord om bijvoorbeeld de leerlingen een terugkoppeling te geven, of om te kijken of er misschien een rekenfout in het spel is.
Je kunt als leraar of als sectie overwegen op verschillende momenten verschillende soorten toetsen te geven. Bijvoorbeeld, kort nadat je een nieuw begrip of nieuwe vaardigheid hebt geïntroduceerd een toetsje met kort-antwoordvragen om na te gaan of het onderwerp is aangeslagen; aan het eind van een hoofdstuk een proefwerk met zowel kort-antwoordvragen als open vragen; bij een parallelproefwerk in de parallelklassen een toets die uit veel kort-antwoordvragen bestaat om de nakijktijd te beperken. Gebruik je ze bij een schoolonderzoek? Je moet dan afwegen: wat je wilt dat de leerlingen laten zien dat ze kunnen, tégen de tijd die het jou als leraar kost om het werk op te stellen en na te kijken.
Bij het geven van een proefwerk hoort het teruggeven en bespreken in de klas. Leerlingen zijn in het algemeen niet zo geïnteresseerd in de bespreking, wel in hun cijfer. Dit maakt het bespreken van een werk met veel kort-antwoordvragen fysiek bijna onhaalbaar. Je moet daar dus iets op verzinnen, bijvoorbeeld de foute opgaven opnieuw laten maken en door de leerlingen laten nakijken.

Slot (of Samenvatting)

De belangrijkste bezwaren tegen meerkeuzevragen zijn:
- sommige, belangrijke doelen van wiskundeonderwijs kun je niet of nauwelijks met meerkeuzevragen toetsen
- een toets met meerkeuzevragen opstellen is lastig en tijdrovend
- in een meerkeuzetoets zit een belangrijk gokelement.

Een toets, samengesteld uit kort-antwoordvragen en een beperkt aantal 'echte' open vragen is een redelijk alternatief, omdat het de nadelen van meerkeuzevragen vermijdt en de voordelen van open vragen bewaart; zo'n toets:
- vraagt de stof terug op verschillende niveaus (kennis, basisvaardigheden, toepassingen, inzicht)
- is gemakkelijk op te stellen en betrekkelijk snel na te kijken.

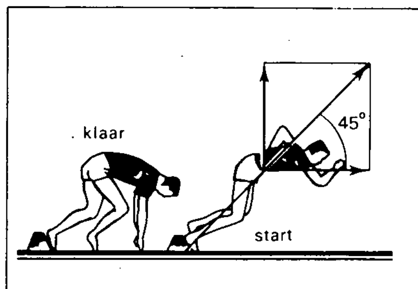
Over de auteur:

Bert Zwaneveld is sinds 1966 op vele terreinen van het wiskundeonderwijs en de school werkzaam. Voor de periode 1986-1988 is hij uitgeleend aan de Open Universiteit om mee te werken aan de daar te ontwikkelen cursussen wiskunde.

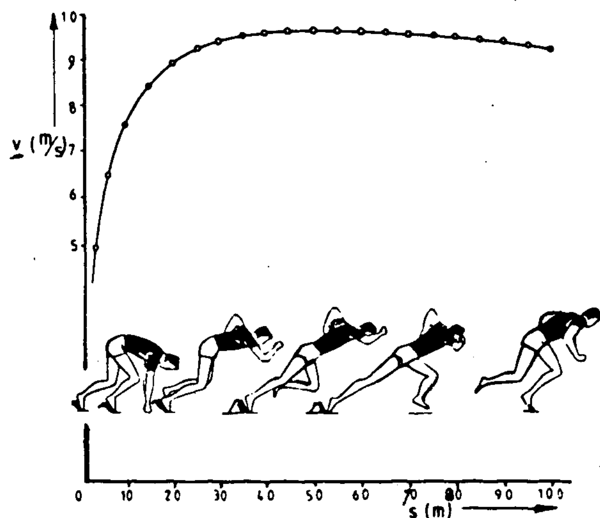
Sport en wiskunde

De 100-meter lopers

Henk Mulder



Sinds de Egyptenaren hebben mensen wiskunde bedreven om concrete situaties van alle dag de baas te worden. Nu ook in de hedendaagse wiskunde steeds meer wordt uitgegaan van werkelijke problemen, zaken waarbij leerlingen zich betrokken voelen en die met behulp van wiskundige technieken opgelost kunnen worden, lijkt het nuttig om naar motiverende voorbeelden te zoeken. Een bruikbaar gebied is de sport. Hier het probleem van de 100-meter lopers. Kijk maar wat u ervan kunt gebruiken.



Figuur 1 Kurvenverlauf der Laufgeschwindigkeit beim 100-m-Lauf (nach Gundlach).

Van start tot finish

In een boek over atletiek uit de DDR trof ik de grafiek van figuur 1, verbeeldend de relatie tussen de afgelegde weg en de snelheid, voor een topsporter op de 100-meter. De snelheid begint met nul, loopt daarna snel op. Halverwege is de waarde maximaal 9,7 m/s, om ten slotte op het eind nog wat terug te vallen.

Meestal werken we in de wiskundeles met allerlei min of meer gecompliceerde functies en relaties, soms in parameter-vorm. Als laatste activiteit komen we dan, na veel gezoek en gereken, ook nog wel eens op een grafiek uit. Examenopgaven suggereren dat 'teken de grafiek' een soort pudding na de maaltijd is. Het lijkt beter om leerlingen eraan te wennen, gevonden resultaten direct grafisch te verbeelden. Het tekenen van de grafiek begint dan niet bij onderdeel e maar reeds bij a.

Praten over 'wiskunde en sport' betekent dat we er vaak op moeten rekenen dat een grafiek uitgangsstelling is en de begeleidende functie, als die eventueel zou bestaan, er nu achteraan bungelt. Een omgekeerde wereld dus.

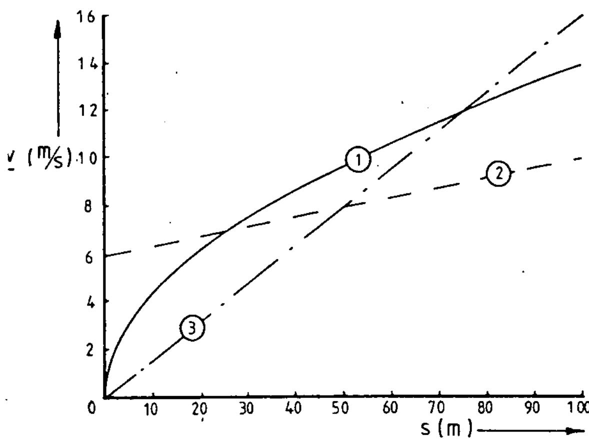
Als ik die grafiek van figuur 1 zie, dan komt bij mij direct de vraag op: hoe lang deed de atleet over die 100 meter? Dat is nog geen eenvoudige zaak.

Van grafiek tot functie

In de natuurkunde zijn wij niet gewend om bij een beweging de snelheid (v = velocity) als functie van de afstand (s = space) uit te zetten. Deze symbolen zijn internationaal vastgelegd. Gebruikelijk is om te werken met v en s als functies van de tijd (t = time). Maar u kunt zich voorstellen dat de relatie s-v op de atletiekbaan veel belangrijker is en bovendien

gemakkelijker te bepalen. Zou het niet mogelijk zijn daaruit die meer bekende relaties af te leiden? En dan blijft de vraag: hoe lang doet hij of zij over de 100 meter?
Om een beetje exact te kunnen werken en ook om leerlingen in deze problematiek in te leiden, kiezen we in dit verhaal voor bekende s, v-functies.

Wie van de drie?
In figuur 2 staan drie grafieken betreffende de 100-meter loop.
Stelt u zich eens voor dat een trainer drie van zijn pupillen opdracht geeft volgens telkens een van deze s, v-grafieken te lopen. Het domein is dus steeds 100 meter. De vraag luidt dan: wie van de drie wint? En wie komt het laatst aan?
Het loopschema voor 2 lijkt wat vreemd. De lopers 1 en 3 beginnen, zoals gebruikelijk, keurig met snelheid nul, maar 2 heeft een vliegende start. Weer eens wat anders. De functies zijn gemakkelijk uit de grafieken af te lezen. De eerste is een stuk van een halve parabool door de oorsprong en door het punt met coördinaten 100 en 14.
De tweede is een rechte door (0, 6) en (100, 10) en de derde ten slotte is een rechte door de oorsprong, eindigend in (100, 16).



Figuur 2 Relaties tussen s en v.

Parabool
De parabool komt nog het meest overeen met de DDR-loopgrafiek van figuur 1.
De vergelijking voor loper 1 kunnen we schrijven als $v = c\sqrt{s}$ waarbij we de constante c kunnen bepalen door (100, 14) in te vullen.
De vergelijking wordt dan: $v = 1{,}4\sqrt{s}$
We voeren nu eerst de tijd t in.
De snelheid v is de afgeleide functie van s naar t, hetgeen we normaal schrijven als: $v = \frac{ds}{dt}$.

$$v = c\sqrt{s} \quad \text{of} \quad \frac{ds}{dt} = c\sqrt{s} \quad \text{of} \quad dt = \frac{1}{c\sqrt{s}}ds$$

dus $t = \int \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{s}}ds$ zodat $t = \frac{2}{c}\sqrt{s} + \text{constante}$.
Omdat bij $t = 0$ geldt $s = 0$ wordt bedoelde constante ook nul. De vergelijking wordt dus: $t = \frac{2}{c}\sqrt{s}$.
We schrijven liever omgekeerd: s als functie van t.
Dan komt het er zo uit te zien: $s = \frac{c^2}{4}t^2$
Bij $c = 1{,}4$, wordt dit $s = 0{,}49\,t^2$.
Door te differentiëren naar de tijd vinden we v als functie van t en wel: $v = 0{,}98\,t$.
De beweging is dus regelmatig versneld, met beginsnelheid nul.
Hoe lang doet loper 1 nu over de 100 meter?
Wel, vul in $s = 100$.

$100 = 0{,}49\,t^2$ of $t = \sqrt{\frac{100}{0{,}49}}$ of 14,29 seconde.

Zo dat was de eerste.
Het zal u niet moeilijk vallen om op een soortgelijke manier beide andere gevallen aan te pakken. Probeert u zelf eerst maar geval 2.

Rechte
In geval 2 is de vergelijking van de rechte door (0, 6) en (100, 10): $v = 0{,}04\,s + 6$
Op dezelfde wijze verder werkend, vinden we achtereenvolgens:

$$\frac{ds}{dt} = 0{,}04\,s + 6 \quad \text{of} \quad dt = \frac{ds}{0{,}04\,s + 6}$$

$$t = \int\frac{ds}{0{,}04s + 6} \quad \text{of} \quad t = 25\ln(0{,}04\,s + 6) + c$$

Als $s = 0$ dan $t = 0$ dus $c = -25 \ln 6$, zodat

$$t = 25 \ln(0{,}04\,s + 6) - 25 \ln 6 = 25 \ln \frac{0{,}04s + 6}{6}$$

$$0{,}04\,t = \ln \frac{0{,}04s + 6}{6}$$

$$\frac{0{,}04s + 6}{6} = e^{0{,}04t}$$

Hieruit volgt: $s = 150(e^{0{,}04t} - 1)$
en verder: $v = 6 \cdot e^{0{,}04t}$
(controle: als $t = 0$ dan $v = 6$; klopt!)
De looptijd voor 2 wordt nu:

$$t = 25 \ln(0{,}04 \times 100 + 6) - 25 \ln 6 =$$

$$25 \ln 10 - 25 \ln 6 = 25 \ln \frac{10}{6} \quad \text{of} \quad 12{,}77 \text{ seconde.}$$

Die is dus 1,5 seconde vlugger dan de eerste.
Maar hoe zou de derde het eraf brengen? Hij voert in het begin zijn snelheid sterker op dan loper 2, maar minder sterk dan 1. Hij eindigt wel op de hoogste snelheid. Wat zou dat opleveren?
Om niet alles direct voor te zeggen, mag u nu eerst weer zelf aan de slag.

Voor de oplossing zie pagina 94.



Johnson wint de 100-meter in 9,83 s op de Wk Atletiek in Rome, 1987. Foto: ANP, Amsterdam

Fouten, een beetje relatief

Anne Zijlstra

Luxaflex

'Meneer, 't is zo warm in de zon, mag de luxaflex naar beneden?'
Het is een schoolverordening dat die dingen alleen door docenten mogen worden bediend, dus ik schiet van mijn eiland af naar het raam naast de onvrijwillige zonnebaadster. Ik heb de touwtjes al in handen als ik me plotseling realiseer dat ik een raam verder moet zijn. Net op tijd, net geen blunder.

Oriëntatie

Mijn vrouw hoor ik tegen anderen wel eens over haar echtgenoot zeggen: 'Echt handig is-t-ie niet, maar hij kan wel veel omdat ie durft. Als er een karweitje in huis te doen is, doet ie het vaak eerst fout'. Het lijkt soms net of wiskunde hand in hand gaat met alles-meteen-snappen en alles-op-de-beste-manier-doen. Het zou goed zijn als wiskunde het imago van vak voor superintelligente mensen kwijt raakte. Wiskunde moet iets krijgen van verkenning van nieuw en onbekend terrein. Een leerling kan pas structuren ontdekken als er een royale oriëntatie aan vooraf gaat. Bij oriëntatie hoort het stoten van je neus, het maken van fouten.

Paedagoog

Van fouten die je zelf gemaakt hebt kun je veel leren: 'al doende leert men'. Er is al veel gewonnen wanneer leerlingen het gevoel hebben dat ze fouten mogen maken. Een docent moet onderscheid maken tussen de soorten fouten in een werkstuk. Hij moet fouten kunnen relativeren, hij moet er begrip voor hebben dat er veel meer factoren een rol spelen dan alleen de vakmatige. Hij moet zo dicht naast de leerlingen staan dat ze hem kennen als iemand die ook fouten maakt, als iemand die ook onvolmaakt is. Dan is een docent niet meer primair een beoordelaar (de oerzonde van het willen oordelen van een ander), maar een paedagoog, een leemeester.

Zelfkennis

Ik wil een paar voorbeelden geven waaruit blijkt dat wiskundemensen alle reden hebben om hun eigen optreden wat te relativeren. Onzekerheid leidt tot fouten, zelfverzekerdheid is evenmin een garantie dat er geen fouten gemaakt zullen worden.
Over fouten van de eerste soort: een gastspreker op een symposium of in een vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zal beginnen. De overheadprojector moet aan. Welke knop? Het beeld op het scherm zit te veel naar links. Projector bijdraaien of opschuiven? Het beeld is te klein. Projector naar voren of naar achteren verschuiven? Of zou dat spiegeltje er iets mee te maken hebben dat het beeld zo laag zit? De voordrachtskunstenaar voelt zich beslist bekeken: al die tronies voor hem gnuiven van slimheid.

Stellige uitspraken worden niet altijd meteen weerlegd, een tegenspreker moet immers behoorlijk zelfverzekerd zijn én scherp om zulke uitspraken onderuit te halen. Er zijn ook dingen waar je finaal over heen leest. In een wiskundevraagstuk over goniometrische toepassingen kom je bijvoorbeeld deze frase tegen: 'de tijd voor één volledige in- en uitademing van een hardloper is π seconden'. De liefde voor 'mooie' uitkomsten heeft al heel wat blindheid voor de werkelijkheid veroorzaakt. Een beetje een praktische instelling is nodig om te doorzien wat er allemaal loos is met de zin 'de oppervlakte van Nederland is 36842 vierkante meter'.
Een paar markante fouten uit eigen koker mag ik u niet onthouden. Eerlijk is eerlijk, en misschien is het heel herkenbaar.
Sjaals, mutsen, handschoenen, waar laat je die in

een semi-ordelijk huishouden? Idee: aan de binnenkant van de deur van de meterkast moet pa een bak maken. Pa meet hoe diep de beschikbare ruimte is: 25 cm. De verticale deurposten blijken 72 cm van elkaar te staan. Pa maakt een bak van breedte 70 cm, diepte 24 cm en hoogte 40 cm. Zeer tevreden over het tempo waarin het baksel gaar is gestoomd schroeft pa de bak aan de binnenkant van de kastdeur. Alle rondslingerende kledingstukken graait hij bijeen en stopt ze in de bak. Ma wordt er bij geroepen voor het applaus en bestaat het om de kastdeur dicht te doen... Ja, vergeet het maar. Stelling van Pythagoras: $70^2 + 24^2 = 74^2$. (Om u te behagen heb ik een 'mooi' tripel genomen). Ai!
Als je twee weken in een Zuidamerikaans land rondstapt ben je wat onzeker met je geld. Je wisselt dollarcheques om in pesos, je weet dat een peso ongeveer 8 cent waard is. Je doet ongewone dingen, je drinkt zuma de naranje, je koopt poncho's. Je koopt in een onbewaakt ogenblik een esmerald van 3800 pesos, met een trots gevoel omdat je 200 pesos hebt afgedongen. Een fraaie steen voor je schoonmoeder, want die is er gek op. Pas in de taxi dringt het tot je door dat je geen 30 maar 300 gulden hebt uitgegeven. Dure schoonmoeder!

Gordijnen

Terug naar het begin.
De luxaflex herinnerde me aan een vergaderzaaltje waarin de zon venijnig naar binnen prikte. Een van de aanwezigen slaakte een opmerking over hinderlijk zonlicht. Hoffelijk als altijd stond de zeer geachte Dr. P. G. J. Vredenduin op om het euvel te verhelpen. Helaas deed hij daarop het verkeerde gordijn dicht..... Dit voorval heeft me geïnspireerd tot een eenvoudige wiskunde-opgave. De leerling of de zelfverzekerde wiskunstenaar die hem tot een goed einde brengt, kan bij de eerstvolgende praktische gelegenheid zomaar staan klungelen met gordijnen of luxaflex.

Schaduw

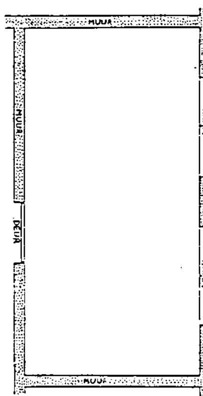
Hieronder zie je een plattegrond van een vergaderzaaltje waarvan de hoge ramen gelegen zijn op het zuiden. (Figuur 1)

Het is warm weer buiten, de zon schijnt fel. Omdat de gordijnen helemaal opengeschoven zijn kan de zon naar binnen schijnen.

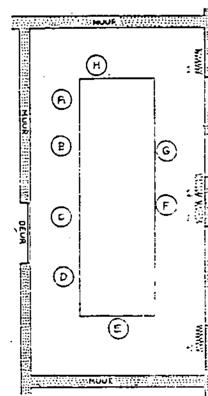
a Teken rechts naast de plattegrond een eenvoudige windroos.

b Arceer in de plattegrond het gedeelte van het vertrek dat niet in de zonneschijn ligt op het moment dat de zon precies in het zuidoosten staat.

De plattegrond is hieronder nogmaals getekend, maar nu met een lange vergadertafel erin. Ook zie je precies de plaatsen waar acht mensen zitten tijdens een bepaalde vergadering. (Figuur 2)
Op een bepaald moment zitten alleen A en B met hun gezicht in de zon; verder heeft niemand hinder van het felle zonlicht.



Figuur 1



Figuur 2

c Bedenk hoe de richting van het binnenvallende zonlicht moet zijn en arceer het gedeelte van het vertrek dat niet in de zon ligt.

d G staat op om voor B een gordijn te sluiten. Schrijf het nummer van het gordijn op:

Over de auteur:

Anne Zijlstra is sinds 1971 wiskundeleraar aan het Christelijk College 'Nassau-Veluwe' te Harderwijk. Hij maakt deel uit van de nieuwe auteursgroep van de methode Sigma.

Huiswerk voor wiskunde (3)

H. J. Smid en A. Verweij

Inleiding

In dit artikel beschrijven wij ons onderzoek rond het fenomeen 'huiswerk voor wiskunde'. In de januari- en februari-nummers van Euclides, jaargang 82/83, publiceerden we een tweetal artikelen over ons literatuuronderzoek[1]).

Aanleiding tot het uitvoeren van dat onderzoek vormden de problemen die studenten, die bij ons de lerarenopleiding wiskunde volgden, bleven houden met het omgaan met huiswerk tijdens hun schoolpracticum en die zij ook, zij het meestal in mindere mate, signaleerden bij hun schoolpracticumdocenten. Natuurlijk resulteerde onze literatuurstudie niet in kant en klare oplossingen voor deze problemen. Zelfs was niet duidelijk of de ideeën die wij door de voornamelijk Amerikaanse en Oost- en Westduitse literatuur aangereikt kregen wel relevant waren voor de Nederlandse situatie.

Een en ander was voldoende aanleiding voor ons om zelf een – zij het kleinschalig – onderzoek te verrichten. De hierdoor verworven inzichten hebben we gebruikt om een onderdeel van de opleiding van onze studenten, het voorbereiden van een lessenserie, een nieuwe inhoud te geven.

Tenslotte hebben we de ervaringen van een twintigtal studenten hiermee geïnventariseerd.

Opzet van het onderzoek

Het onderzoek bestond uit een empirisch en een experimenteel gedeelte.

Met 'empirisch' bedoelen we een onderzoek naar de feitelijke situatie, met 'experimenteel' een onderzoek waarbij een àndere methode wordt beproefd. Door middel van empirisch onderzoek wilden we nagaan welke van de in de literatuur geschetste problemen er bij een goed functionerende ervaren leraar in een 'gewone' klassesituatie rond huiswerk voor wiskunde optraden. De problemen waarvan we wilden nagaan of die voorkwamen waren:

1 Het op te geven huiswerk wordt door de leraar weinig bewust gepland: hierdoor krijgt huiswerk meestal uitsluitend de rol van verwerken, op een weinig gevarieerde wijze toebedeeld.
2 Leerlingen zien de zin van het huiswerk niet in.
3 Leerlingen zijn niet in staat hun huiswerk op eigen kracht te maken.
4 Nabespreking van huiswerk neemt een groot deel van de les in beslag, waarin de leerlingen tamelijk passief zijn.

Op grond van de resultaten van het eerste, het empirische, deel wilden we komen tot een concrete vraagstelling voor het tweede, het experimentele, deel van het onderzoek. Dit moest dan gericht zijn op concrete verbeteringen in de bestaande onderwijspraktijk ten aanzien van de in het empirisch onderzoek gesignaleerde problemen, waarbij we ons wilden richten op het handelen van de leraar. Dit laatste met het idee dat dergelijke verbeteringen ook aan onze studenten geleerd zouden kunnen worden.

Omdat ons slechts beperkte tijd en schaarse middelen ter beschikking stonden, kozen we ervoor om het empirische deel van het onderzoek uit te voeren in één klas die over één afgerond onderwerp van één wiskundeleraar enkele weken onderwijs kreeg. Bovendien besloten we deze klas mede te gebruiken als controlegroep voor het experimentele deel van het onderzoek. De klas die in het volgende schooljaar over hetzelfde onderwerp van dezelfde leraar les kreeg wilden we dan als proefgroep gebruiken. Dit betekende dat wij tijdens de uitvoering van het empirische deel van het onderzoek ook gegevens moesten verzamelen die nodig konden zijn om de controlegroep en de proefgroep te vergelijken.

Uitvoering van het empirische deel van het onderzoek

Een 'gewone' klassesituatie en een 'gewone', goed functionerende, ervaren wiskundeleraar vonden

we naar ons idee in klas 3 havo van een gemeentelijke scholengemeenschap[2]). In het schooljaar 83/84 observeerden we alle 12 lessen over het onderwerp 'tweedegraads vergelijkingen' in deze klas en interviewden we elk van de 29 leerlingen en de leraar afzonderlijk, dit alles om na te gaan welke van de bovengenoemde vier problemen in welke mate in deze situatie voorkwamen.

Resultaten van het empirische onderzoek

Wat betreft het eerste probleem, de planning door deze leraar voor de behandeling van 'tweedegraads vergelijkingen': Voordat hij aan dit onderwerp begonnen was, had hij uitgezocht welke onderdelen van het leerboek (Getal en Ruimte deel 3HV1[3])) hij zou overslaan. Per les bekeek hij dan hoeveel verder de leerlingen met de opgaven uit het boek zouden kunnen komen in zo'n 20 minuten tijd en of daarvoor nog uitleg van nieuwe theorie en/of het uitwerken van een voorbeeld nodig zou zijn. Theorie en voorbeelden werden dan meestal in 5 à 10 minuten behandeld. Apart plannen van het werk dat leerlingen thuis moesten doen deed de leraar niet: het huiswerk was altijd: afmaken van het werk dat ongeveer 20 minuten voor het einde van de les opgegeven werd en waaraan de leerlingen, eventueel met enige hulp van hun buurman/buurvrouw en/of de leraar, konden werken tot de bel ging. Welke opgaven leerlingen als huiswerk moesten maken hing dus, behalve van hun ijver tijdens het laatste gedeelte van de les, alleen af van hoe de indeling in porties van 20 minuten werk uitviel. De leraar was wel duidelijk geïnteresseerd in een betere methode van planning, waarbij hij wilde vasthouden aan het idee dat leerlingen die dat willen het werk in de les al bijna of helemaal af kunnen krijgen.

In deze 3 havo-klas, bij deze leraar en bij dit onderwerp, bleek het als tweede genoemde probleem niet voor te komen. Alle leerlingen vonden het huiswerk zinvol, al konden zij op de vraag naar het waarom meestal niet meer bedenken dan: 'goed om te oefenen'. Wel vonden zij bijna allemaal, evenals de leraar, dat de oefeningen (behalve die aan de vooravond van de repetitie) even goed of beter tijdens de les konden plaats vinden en dat daar ook bijna altijd voldoende tijd voor was.

Toch werd er, zeker in de laatste 10 minuten van de les, niet erg hard gewerkt in de klas. Veel leerlingen kletsten liever nog wat of besteedden aandacht aan andere zaken. Zij waardeerden het erg dat de leraar de gelegenheid gaf om wat dit betreft zelf een keuze te maken.

Hierbij speelde mee dat noch de omvang, noch de moeilijkheidsgraad van het huiswerk door de leerlingen als een probleem werd ervaren. Veel leerlingen hadden het opgegeven werk regelmatig in de les al bijna of helemaal af, al of niet met enige hulp van de leraar. En als het niet af was, dan nam het huiswerk nooit meer dan een kwartier in beslag, terwijl het bijna altijd lukte dit zonder hulp te maken.

Alleen de voorbereiding op de repetitie gaf in zekere zin aanleiding tot het hierboven als derde genoemde probleem op het gebied van huiswerk. Veel leerlingen besteedden veel meer tijd aan het leren van de theorie uit het leerboek dan aan het bestuderen van uitwerkingen van opgaven en het (nog eens) zelf maken van opgaven. Als belangrijkste reden hiervoor werd genoemd dat ze geen keuze konden maken uit de grote hoeveelheid eerder gemaakte opgaven en/of uit de herhalingsopgaven achterin het boek. De leraar, die van mening was dat de leerlingen voornamelijk het maken van opgaven zouden moeten oefenen (de repetitie bestond alleen uit sommen), had zich echter nooit zo gerealiseerd dat het voor leerlingen een probleem kon zijn om een geschikte collectie oefenopgaven te kiezen.

Hoewel de leerlingen dus, afgezien van enige problemen voor de repetitie, geen moeilijkheden zagen met betrekking tot het huiswerk voor wiskunde, werd dit huiswerk toch lang niet altijd gemaakt. Dit werd volgens de leerlingen in de hand gewerkt door een gebrek aan controle door de leraar. Bovendien was er in de volgende les altijd genoeg gelegenheid om 'de sommen alsnog in het schrift te krijgen'. De leraar begon de les namelijk steeds met een ongeveer 20 minuten durende nabespreking van het in de vorige les opgegeven werk. Behalve in één geval, toen een klein deel van de nabespreking al aan het eind van de vorige les had plaats gevonden, werden alle opgegeven sommen door de leraar op het bord uitgewerkt, ook de opgaven waarmee de leraar tijdens de vorige les al veel leerlingen had geholpen. Daarbij vroeg hij regelmatig de te nemen tussen-

stappen met de uitkomsten ervan aan de leerlingen. Ongeveer de helft van de leerlingen deed steeds mee. De overigen zaten wat te praten, te lezen of aan andere vakken te werken: zij keken dan wel af en toe even naar het bord om te zien of er al iets verscheen wat zij niet of fout hadden.
Zowel de leerlingen als de leraar waren zich ervan bewust dat de leerlingen tijdens zo'n bespreking weinig te doen hadden, maar zij vonden dat geen probleem. Zij vonden het van groot belang dat alles altijd op het bord komt en dat de leerlingen daarbij voldoende gelegenheid krijgen om vragen te stellen.
Het hierboven als vierde genoemde verschijnsel, met betrekking tot de nabespreking van huiswerk voor wiskunde, deed zich dus wel voor maar werd door de betrokkenen niet als een probleem ervaren.

Vraagstelling voor experimenteel onderzoek

Gezien de resultaten van het empirische deel van het onderzoek lag het voor de hand om ons experimentele onderzoek in deze situatie in hoofdzaak te richten op mogelijke verbeteringen in het handelen van de leraar met betrekking tot de planning van het werk dat leerlingen aan het eind van de les en thuis moeten maken. In dit artikel zullen we ons hiertoe beperken. We wilden uitgaan van de volgende randvoorwaarden:

- de door ons voorgestelde veranderingen moeten eenvoudig in te voeren zijn, zonder dat ze de leraar en de leerlingen veel extra tijd en moeite kosten;
- de veranderingen mogen niet ten koste gaan van de door de leerlingen gewaardeerde aspecten van het onderwijs van deze leraar: de ontspannen sfeer, de heldere uitleg, de ruime gelegenheid om vragen te stellen, de mogelijkheid om zelf te kiezen voor hard of minder hard werken tijdens de les, de niet te grote moeilijkheid en omvang van het huiswerk, de uitvoerigheid van de nabespreking van het opgegeven werk;
- de veranderingen mogen de resultaten van de leerlingen niet negatief beïnvloeden.

Door deze randvoorwaarden wilden we vermijden dat het onderzoek zou leiden tot voorstellen voor verbeteringen die in de praktijk door de meest betrokkenen niet haalbaar of niet wenselijk gevonden worden.

Wat betreft de planning van de inhoud van het huiswerk is een aantal experimenten beschreven in de Amerikaanse literatuur[4]) waarin huiswerkopgaven ter verwerking van de in de afgelopen wiskundeles behandelde stof gecombineerd werden met opdrachten ter voorbereiding van nieuwe leerstof en/of herhalingsopgaven over stof die enige lessen terug behandeld was. Deze manier om tot gevarieerder huiswerk te komen, gebaseerd op leerpsychologische principes, leek ons haalbaar omdat het extra werk voor de leraar te overzien en voor de leerlingen nihil leek te zijn. Verder zou op deze manier weinig ingegrepen behoeven te worden in de gewone gang van zaken in de klas.
Bovendien leverden de Amerikaanse experimenten aanwijzingen op dat combinaties van verwerkend huiswerk met voorbereidend en/of herhalend huiswerk voor wiskunde betere leerresultaten kunnen opleveren dan huiswerk dat alleen ter verwerking van het laatst geleerde dient. Hoewel het verbeteren van de resultaten van leerlingen in ons onderzoek niet voorop stond, kon op grond van deze aanwijzingen wel verwacht worden dat bij een dergelijke aanpak tenminste voldaan kon worden aan de voorwaarde dat de resultaten van de leerlingen niet zouden mogen verslechteren. Omdat we voor het plannen van de inhoud van het werk dat leerlingen in de klas en thuis moeten maken wilden komen tot een methode die overdraagbaar zou zijn, hadden we behoefte aan duidelijke richtlijnen voor het maken van zo'n planning. We dachten bij het opstellen van richtlijnen gebruik te kunnen maken van de bekende strategie van de ordening van leerstappen zoals door Van Dormolen beschreven[5]), waarin de achtereenvolgende fasen **oriënteren, ontwikkelen** en **verwerken** in het leerproces bij een begrip, stelling of werkmethode worden onderscheiden.
Zo kwamen we uiteindelijk tot de volgende *vraagstelling* voor ons experimentele onderzoek:
Kan men binnen de gestelde randvoorwaarden, op basis van de strategie voor de ordening van leerstappen van Van Dormolen het werk dat leerlingen in de klas en thuis moeten maken zó plannen en uitvoeren dat het huiswerk uit herhalende, verwerkende en voorbereidende componenten bestaat? Welke veranderingen brengt dit met zich mee en hoe oordelen leraar en leerlingen daarover?

Voorbereiding van het experimentele deel van het onderzoek

De 'richtlijnen' voor de in bovengenoemde vraagstelling bedoelde planning werden als volgt opgesteld.
De strategie van Van Dormolen, die wij als basis voor de planning gekozen hadden, is bedoeld voor het onderwijzen van een begrip, een stelling of een werkmethode. De eerste richtlijn werd daarom:

1 De te behandelen leerstof moet in leerstofeenheden, dat zijn begrippen, stellingen en werkmethoden, ingedeeld worden.

Het leerproces bij zo'n leerstofeenheid moet dan volgens Van Dormolens strategie beginnen met een fase **oriënteren**, waarin de leerstappen 'ophalen van oude kennis', 'probleem leren kennen' en 'doel en werkwijze leren kennen' onderscheiden worden.
Opdat de eerste twee leerstappen, mits goed voorbereid in de les en ondersteund door geschikt leermateriaal, door leerlingen zelfstandig met succes doorlopen kunnen worden, formuleerden we als richtlijn:

2 Het 'ophalen van oude kennis' en het 'probleem leren kennen' bij een leerstofeenheid kunnen als huiswerk opgegeven worden.

Bij de als derde genoemde leerstap van **oriënteren** (Van Dormolen legt binnen deze fase geen volgorde van leerstappen vast), speelt de inbreng van de leraar zo'n grote rol, dat het voor de hand lag om te bepalen:

3 Het 'doel en werkwijze leren kennen' moet tijdens de les plaats vinden.

De volgende fase, **ontwikkelen,** omvat heel nadrukkelijk ook de controle of het begrip, de stelling of de werkmethode bij de leerling goed ontwikkeld is. Een bekend leerpsychologisch principe is dat feedback snel gegeven moet worden. Door dit principe toe te passen in de fase **ontwikkelen**, kan voorkomen worden dat een verkeerd begrip of een onjuiste stelling of werkmethode 'inslijpt', zich 'vastzet' in het denken van de leerling. Daarom de volgende richtlijn:

4 De fase **ontwikkelen** bij een leerstofeenheid moet in z'n geheel tijdens de les doorlopen worden.

Als het ontwikkelen goed gegaan is, behoeft in de fase **verwerken** een wat uitgestelde feed-back niet altijd bezwaarlijk zijn. Echter, als er een serie verwerkingsopgaven van eenzelfde soort is of als een serie opgaven 'gestapeld' is in de zin dat in de volgende opgaven gebruik gemaakt moet worden van in vorige opgaven opgedane kennis of vaardigheden, dan is het van belang dat gecontroleerd wordt of het eerste deel van zo'n serie goed gemaakt is voordat aan de rest begonnen wordt. Deze overwegingen leidden tot de volgende richtlijn:

5 Het **verwerken** kan gedeeltelijk in de les en gedeeltelijk thuis plaats vinden. Als een serie gelijksoortige of 'gestapelde' opgaven in de verwerkingsfase gebruikt wordt, dan moet zo'n serie zó over de les en het huiswerk verdeeld worden dat over het eerste deel door de leraar feed-back gegeven kan worden voordat het volgende deel gemaakt wordt.

In de strategie van Van Dormolen komt **herhalen** niet expliciet voor. Wij voegden deze fase toe omdat, zoals gezegd, bij Amerikaanse onderzoeken goede resultaten met herhalend huiswerk waren geboekt. Als de fasen uit de strategie van Van Dormolen zonder al te veel problemen doorlopen zijn, lijkt het ook niet nodig dat **herhalen** onder het oog van de leraar plaats vindt. Onze laatste richtlijn luidde dan ook:

6 Het **herhalen** kan, naast het werk aan een volgende leerstofeenheid, als huiswerk opgegeven worden.

Uitvoering van het experimentele onderzoek

Omdat de richtlijnen kort voordat 'onze' leraar in de volgende 3 havo klas aan het onderwerp 'tweedegraads vergelijkingen' zou beginnen nog niet zo uitgekristalliseerd waren als hierboven beschreven, besloten we de planning van het werk van de leerlingen in de lessen en thuis voor dit onderwerp zelf ter hand te nemen.
In het vorige schooljaar hadden we gemerkt dat de leraar zich vrij strikt aan het leerboek hield: hij sloeg alleen enkele paragrafen en verder hier en daar een oefening over. Daarom gingen wij bij onze planning ook uit van het leerboek. De planning verliep als volgt.

Eerste stap:
We deelden de te behandelen leerstof uit het leerboek in in leerstofeenheden (vgl. richtlijn 1) en noteerden het resultaat in het boek.

Tweede stap:
Bij elke leerstofeenheid stelden we vast welke stukken tekst en/of opgaven uit het leerboek konden passen in de fasen **oriënteren, ontwikkelen, verwerken** en **herhalen**. Wat betreft **oriënteren** maakten we daarbij onderscheid tussen 'voorkennis ophalen' en 'probleem leren kennen'. (Over 'doel en werkwijze leren kennen' is in een dergelijk leerboek nauwelijks iets te vinden.)
Bij de fase **ontwikkelen** kozen we ook steeds enkele (onderdelen van) opgaven uit waarmee gecontroleerd zou kunnen worden of de nieuwe leerstof goed ontwikkeld was. Sommige opgaven pasten qua inhoud evengoed bij **verwerken** als bij **herhalen.** Een keuze maakten we dan op grond van de hoeveelheid opgaven die we van elk van beide fasen al gevonden hadden.
Het resultaat van deze stap noteerden we ook in het boek, naast de betreffende teksten. Als voorbeeld geven we de indeling van het begin van het hoofdstuk, voor het onderdeel **herhalen** werden enkele opgaven uit de herhalingsparagraaf gekozen. Zie figuur 1.

Derde stap:
We konden nu in één oogopslag zien waar leemtes optraden. Op een moment bijvoorbeeld moesten de leerlingen handig kunnen rekenen met wortelvormen, iets wat in het vorige leerjaar voor het laatst aan de orde gekomen was. Deze leemte wat betreft **oriënteren** vulden we op met een selectie uit de betreffende theorie en enkele opgaven uit een vorig leerboek. Verder hadden we in het hoofdstuk 'Tweedegraads functies' bij verschillende leerstofeenheden weinig of geen opgaven over **herhalen** kunnen vinden. Dit probleem konden we heel snel oplossen door in zo'n geval enkele geschikte opgaven uit de bij het hoofdstuk behorende herhalingsparagraaf achterin het boek te kiezen.

HOOFDSTUK 3

Tweedegraadsvergelijkingen

I oplossen 2e grd. vgl. door ontbinden; a, b en c bevatten geen gemeenschappelijke factoren.

I ORIËNTEREN (1)

§ 1. Inleiding

a. Bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen moeten we vaak gebruik maken van *ontbinden in factoren*. Daarom zullen we eerst de twee belangrijkste regels voor het ontbinden in factoren herhalen.

I. De gemeenschappelijke factoren *buiten haakjes halen*: Bijv. $x^2 + 9x$ wordt $x(x + 9)$ en $4x^2 - 12x$ wordt $4x(x - 3)$.

II. De *produkt-som-methode* met behulp van een tabel. Bijv. $x^2 - 2x - 8$ is te ontbinden door twee getallen te zoeken waarvan het produkt -8 en de som -2 is. $x^2 - 2x - 8$ wordt dus $(x + 2)(x - 4)$.

	-8	
	1	-8
	-1	8
→	2	-4
	-2	4

Opgaven

1. Ontbind in factoren
   a. $x^2 + 2x - 3$ c. $x^2 - 14x + 49$ e. $x^2 - 48x - 49$
   b. $x^2 - 4x + 3$ d. $x^2 - 14x$ f. $x^2 + x$

2. Ontbind in factoren
   a. $x^2 - 64$ c. $x^2 - x - 2$ e. $x^2 + x - 2$
   b. $6x^2 - 18x$ d. $x^2 - 2x$ f. $6x^2 - 9x$

3. Ontbind in factoren
   a. $x^2 - 9x + 14$ c. $x^2 - 3x - 4$ e. $x^2 - 10x + 25$
   b. $x^2 - 9x$ d. $x^2 - 3x - 10$ f. $4x^2 - x$

I ORIËNTEREN (2)

b. Voorbeelden van *tweedegraadsvergelijkingen* zijn
$$x^2 - 2x - 15 = 0, \quad 3t^2 = 27 \quad \text{en} \quad -2x(x + 3) = 8x$$
Een tweedegraadsvergelijking noemen we ook *vierkantsvergelijking*. Dit laatste korten we af tot vkv.

Iedere vierkantsvergelijking is te schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$. Hierin is $a \neq 0$.

In $ax^2 + bx + c = 0$ noemen we a, b en c de *coëfficiënten*.

I ONTWIKKELEN

Voorbeeld. Los op $x(x + 5) = x + 12$.

Uitwerking

$x(x + 5) = x + 12$ *Maak het rechterlid 0.*
$\Leftrightarrow x^2 + 5x - x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ *Ontbind het linkerlid.*
$\Leftrightarrow (x + 6)(x - 2) = 0$ *Pas $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ toe.*
$\Leftrightarrow x + 6 = 0 \vee x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2$ Dus $S = \{-6, 2\}$

In het voorbeeld zijn we als volgt te werk gegaan

1. Herleid de vergelijking zó, dat het rechterlid 0 is.
2. Ontbind het linkerlid in factoren.
3. Gebruik $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Opgaven

4. Los op
   a. $x^2 - 7x + 12 = 0$ c. $(x - 1)(x + 5) = 0$
   b. $x^2 = -14x + 15$ d. $x^2 + 1 = 5(x + 5)$

I VERWERKEN

5. Los op
   a. $3x(2x + 1) = 0$ c. $x^2 + 30 = 11x$
   b. $x^2 = 7x$ d. $x(x + 2) = 7 - 4x$

Figuur 1

Vierde stap:
We verdeelden tenslotte de leerstof over de beschikbare 12 lessen en het bijbehorende huiswerk aan de hand van de richtlijnen 2 t/m 6. Voor elke les maakten we een blaadje waarop stond welke tekst over nieuwe theorie de leraar na het huiswerkbespreken moest behandelen, welke opgaven hij daarbij ter controle van het geleerde moest gebruiken, welke opgaven hij vervolgens in welke volgorde moest opgeven voor de laatste 20 minuten en het huiswerk (de volgorde was: **verwerken, oriënteren, herhalen**), en tot hoever de verwerkingsopgaven al met de leerlingen besproken zouden moesten zijn als de bel ging (vgl. richtlijn 6).
Deze planning maakten we in enkele uren, waarmee we naar ons idee hadden voldaan aan de randvoorwaarde dat de benodigde extra inspanning voor een leraar die zo te werk gaat beperkt moet blijven.
Het resultaat van deze planning was dat de opgaven uit het leerboek niet, zoals voorheen, in de 'gewone' volgorde doorgewerkt zouden worden. Nieuw was ook dat sommige opgaven al midden in de les in samenhang met de nieuwe theorie gemaakt en besproken zouden worden en dat er aan het eind van de les vaak, ter voorbereiding op het huiswerk, een nabespreking van enkele verwerkingsopgaven zou plaatsvinden.

We vroegen de leraar verder zo gewoon mogelijk les te geven, dit in verband met de randvoorwaarde dat de door de leerlingen van de vorige 3 havo klas gewaardeerde aspecten van zijn onderwijs behouden moesten blijven. Dit betekende bijvoorbeeld dat de leerlingen ook nu zelf zouden kunnen bepalen of zij in de laatste periode van de les meer of minder hard werkten. Sommigen zouden dan ook geen huiswerk meer behoeven te maken, anderen zouden huiswerk hebben dat bestond uit alleen herhalende opgaven òf uit oriënterende en herhalende opgaven, òf uit verwerkende, oriënterende en herhalende opgaven. Voor wie in de klas het minst hard werkte, zou het huiswerk dus het meest van de in onze vraagstelling bedoelde samenstelling zijn.

Tijdens de uitvoering van onze planning door de leraar in het schooljaar 1984/1985 observeerden we weer alle 12 lessen die in 3 havo aan de behandeling van 'tweedegraads vergelijkingen' besteed werden.

Om een indicatie te krijgen of voldaan was aan de randvoorwaarde dat de prestaties van de leerlingen niet negatief beïnvloed mochten worden door de door ons voorgestelde veranderingen, werd een repetitie gegeven die vergelijkbaar was met die van het vorige jaar. Deze werd door de leraar ook op dezelfde manier gecorrigeerd en becijferd. Verder verzamelden we, evenals het vorige jaar, cijfermateriaal dat een idee kon geven van de resultaten van de leerlingen bij andere wiskunde onderwerpen.
Tenslotte interviewden we de leraar en alle leerlingen van 3 havo afzonderlijk, om te weten te komen of aan de vorige randvoorwaarden voldaan was en hoe zij verder over de veranderingen dachten.

Resultaten van het experimentele onderzoek

Onze lesplanning bleek redelijk goed uitvoerbaar, al moest de verdeling over de lessen enkele malen bijgesteld worden. Dit kon echter zonder veel moeite geschieden. Het enige onderdeel waarbij wat meer systematisch afwijkingen van de planning optraden, was het bespreken aan het eind van de les van in dezelfde les gemaakt werk. Dit was een nieuw element in de lessen en de leraar merkte zowel bij zich zelf als bij de leerlingen een zekere weerstand hiertegen. Deze besprekingen vonden daarom minder vaak plaats dan gepland was.
Evenals bij het maken van de planning, werd bij de uitvoering ervan aan de eerste randvoorwaarde, dat de voorgestelde wijzigingen eenvoudig in te voeren moeten zijn en de leraar en de leerlingen niet veel extra tijd en moeite mogen kosten, voldaan. De leraar besteedde niet meer tijd aan lesvoorbereiding dan normaal en uit de interviews met de leerlingen bleek dat de leerlingen in de experimentele klas niet of nauwelijks meer tijd aan het thuis maken van wiskunde opgaven dachten te hebben besteed dan de leerlingen in het vorige jaar.
Uit de interviews bleek ook dat aan de tweede randvoorwaarde was voldaan: de leerlingen van de experimentele klas noemden even vaak dezelfde positieve aspecten van het onderwijs van hun wiskundeleraar als de leerlingen van de vorige klas: zij hadden met betrekking tot deze aspecten geen negatieve effecten van ons experiment waargenomen.
De leraar had zich ook niet belemmerd of in een

onnatuurlijke situatie geplaatst gevoeld, behalve de enkele keren dat hij op ons verzoek om aan het eind van de les een nabespreking van gemaakt werk te houden was ingegaan. Hij had zeker geen negatieve effecten van het experiment op zijn relatie met de leerlingen ervaren.
De derde randvoorwaarde was dat de resultaten van de leerlingen niet negatief beïnvloed mogen worden door uitvoering van onze planning. In de controle-klas was het gemiddelde cijfer voor de repetitie over tweedegraadsvergelijkingen 6,68 en in de experimentele klas was dit voor een repetitie van gelijke omvang en zwaarte slechts 6,23. Hoewel dit resultaat in eerste instantie teleurstellend leek, bleek bij statistische analyse van het cijfermateriaal dat het verschil tussen deze cijfers niet significant was en bovendien toegeschreven zou kunnen worden aan het verschil in relevante voorkennis tussen de klassen bij aanvang van de lessenserie.

Voor wat betreft de veranderingen die onze aanpak in de lessen teweeg bracht, vonden wij opvallend dat er verschuivingen in de tijdsbesteding merkbaar waren. De tijd besteed aan het ontwikkelen van nieuwe stof nam toe door het inbrengen van een nieuw element in het ontwikkelen: de controle, aan de hand van enkele opgaven, van de voortgang in de ontwikkelfase. Ook de tijd besteed aan nabespreking van thuis en in de les zelf gemaakt werk, nam enigszins toe, maar deze toename was door ons zéker niet bedoeld en ook niet voorzien. Een verklaring achteraf vormde de naar verhouding ongeveer even grote toename in het totale aantal voor oriëntering, verwerking en herhaling opgegeven sommen.
De toename van de tijd besteed aan door de leraar geleide activiteiten ging ten koste van het zelf werken van de leerlingen aan het eind van de les. De tijd voor zelf werken nam hierdoor af van bijna 20 minuten tot ongeveer een kwartier. Toch werden er, zoals gezegd, in het laatste jaar meer sommen opgegeven en was er naar het idee van vrijwel alle leerlingen niet meer huiswerk gemaakt, terwijl wij uit de interviews niet de indruk kregen dat het werk in de experimentele klas vaker niet af was. Het lijkt dus of de tijd voor zelf werken tijdens de les in de experimentele klas effectiever gebruikt is.
Wat leerlingen duidelijk opgevallen was, was het opfrissen van weggezakte voorkennis (het herleiden van wortelvormen) met behulp van een stencil met theorie en opgaven. Zowel leraar als leerlingen oordeelden positief hierover.
Slechts één leerling had opgemerkt dat wel eens van de gebruikelijke volgorde van de opgaven was afgeweken. De leraar had de door ons ontworpen indeling verhelderend gevonden; hij was zich hierdoor meer bewust geworden van de functie van bepaalde onderdelen van de stof.

Conclusie

Uit de resultaten van het experimentele onderzoek bleek naar onze mening dat we erin geslaagd waren om in de gegeven situatie verbeteringen aan te brengen in het handelen van de leraar ten aanzien van de structurering van het werk dat leerlingen in de les en thuis maken, zó dat huiswerk op een meer gevarieerde manier benut werd dan alleen als directe verwerking. Hoewel dit door de betrokken leerlingen en de leraar niet als een probleem ervaren was, vonden wij dat onze aanpak ook een verslechtering in het handelen van deze leraar rond huiswerk met zich meegebracht had: de nabespreking van door leerlingen gemaakt werk nam een nòg groter deel van de les in beslag, waarbij de leerlingen niet minder passief waren dan voorheen.
Omdat wij de verbeteringen belangrijker vonden dan de geconstateerde verslechtering, en omdat we het idee hadden dat onze aanpak in een andere situatie niet noodzakelijk deze verslechtering zou behoeven te veroorzaken, besloten we te proberen onze planningsmethode in de lerarenopleiding van de T.U. Delft in te passen.

Inpassing in de lerarenopleiding

Het voorbereiden en uitvoeren van langere lessenseries vormde al geruime tijd een onderdeel van de lerarenopleiding wiskunde van de T.U. Delft, bedoeld voor de al wat gevorderde student. We kregen daarbij echter steeds meer de indruk dat sommige opdrachten waarmee de lessenserie(s) voorbereid werden (o.a. ontleend aan het bekende boek 'Guidelines for Teaching Mathematics' van Johnson and Rising[6])) niet optimaal functioneerden. Daarom formuleerden we in de zomer van

1985 nieuwe opdrachten voor het voorbereiden van een lessenserie, gebaseerd op enerzijds de oude opdrachten rond het analyseren van de leerstof in samenhang met de voorkennis, het doelstellen, het instappen en toepassen en het opstellen van een repetitie, en anderzijds de hierboven in de paragraaf 'Uitvoering van het experimentele onderzoek' beschreven vier stappen van onze planningsmethode voor de indeling van de leerstof en de verdeling over de verschillende fasen van het leerproces. In het cursusjaar '85/'86 hebben 20 studenten een of meer lessenseries voorbereid aan de hand van de nieuwe opdrachten. We vroegen deze studenten twee maal een vragenlijst in te vullen: éénmaal na voltooiing van hun voorbereiding maar vóór de uitvoering en éénmaal na uitvoering van de lessenserie(s). De vragen waren gericht op de planningsmethode in vier stappen.

We vatten resultaten als volgt samen: Een grote meerderheid van de studenten zei veel steun te hebben gehad van de planningsmethode. Wel werd deze soms wat (te) uitvoerig genoemd. Enkele studenten vonden de methode niet zo geschikt voor de voorbereiding van lessen, maar wel goed om een boek te beoordelen of om te zien hoe de leerstof in elkaar zit.
De meningen over de moeilijkheid van de tweede stap, het indelen van de leerstof uit het boek in **oriënteren, ontwikkelen, verwerken** en **herhalen**, liepen uiteen van 'makkelijk' tot 'moeilijk', dit laatste omdat zo'n indeling niet eenduidig te maken is. Bij de vierde stap, de verdeling van de leerstof over de lessen en over de verschillende fasen van het leerproces daarin, vormde het inschatten van de snelheid waarmee de leerlingen de stof kunnen doorwerken een veel voorkomend probleem.
Evenals bij ons experiment het geval was geweest, dwong dit probleem de studenten tijdens de uitvoering van de lessenserie(s) nogal eens tot het aanpassen van de verdeling van de leerstof over de lessen. Hun opinie was echter ook dat dit, juist door de grondige planning vooraf, steeds vrij gemakkelijk en snel te realiseren was. Verder bleek tijdens de uitvoering van de lessen hier en daar dat de leerlingen niet zo gewend waren aan een dergelijke structurering van het (huis)werk. Met name het herhalingsaspect was vaak nieuw. Dit leverde soms wel enige problemen op.

Bij de lessenseries die later, tijdens het schoolpracticum (en niet vooraf) op het instituut waren voorbereid, was meestal de beschreven planningsmethode als basis gebruikt, maar waren vaak enkele onderdelen was minder ver uitgewerkt. De opinie van de studenten over de methode was, ook na uitvoering van deze lessenserie(s), zij het met wat meer nuanceringen, duidelijk positief gebleven.

Tenslotte

Bovengenoemde resultaten zeggen op zichzelf natuurlijk weinig over de waarde van de gevolgde planningsmethode. De aanpak die bij één ervaren leraar met één leerboek bij een onderwerp in één klas van één school binnen de gestelde randvoorwaarden goed uitvoerbaar was geweest, bleek voor beginnende studenten-leraren in heel andere situaties een steun bij de voorbereiding en uitvoering van hun lessenseries. Maar of in die andere situaties ook aan de randvoorwaarden, bijvoorbeeld ten aanzien van de leerresultaten van de leerlingen, voldaan was kon niet nagegaan worden. Ook kon niet onderzocht worden of bij het uitvoeren van de planning door onze studenten de tijd besteed aan het nabespreken van (huis)werk in de hand gehouden kon worden. Maar als men van mening is dat wat meer systematisch opgezet en gestructureerd onderwijs, op basis van didactische en leer-psychologische theorieën, de voorkeur verdient boven onderwijs 'uit de losse pols', een opvatting die binnen de lerarenopleiding van de T.U. Delft als een van de uitgangspunten wordt beschouwd, dan is ons inziens duidelijk dat de in het voorafgaande beschreven methode goede mogelijkheden biedt. Wij vinden de resultaten in elk geval voldoende psoitief om de planningsmethode als onderdeel van onze lerarenopleiding te handhaven.

Literatuur:
Voor een literatuuroverzicht verwijzen wij naar noot 1.

1 Euclides, 58e jaargang nr. 5 blz. 180-184, nr. 6 blz. 219-225.
2 Leraar: F.M. Hazen. School: Stedelijke Scholengemeenschap 'Hugo Grotius' te Delft.
3 Getal en Ruimte deel 3 HV1, 1e druk 1982, uitgave Educaboek.

4 Zie bijvoorbeeld J. C. Peterson: Four Organizational Patterns for Assigning Mathematics Homework.
School, Science and Mathematics, jg71, 1971, nr. 7 blz. 592-596.
5 J. van Dormolen: Didactiek van de wiskunde, 3e druk, Utrecht 1981, paragraaf 4.3.
6 D. A. Johnson en G. R. Rising: Guidelines for Teaching Mathematics, Belmont 1972.

Over de auteurs:

H. J. Smid en A. Verweij zijn beiden verbonden aan de T.U. Delft, als vakdidacticus wiskunde.

Boekbespreking

R. E. Hoffmann en K. H. Hofmann eds., Continuous lattices and their applications, Marcel Dekker, New York, 1985.

In het onderhavige boek vinden we de weerslag van een conferentie over continue tralies en hun toepassingen. Het boek is voor iemand die niet dagelijks met continue tralies omgaat nogal ontoegankelijk. Ik zal dan ook van een echte bespreking van dit boek afzien. Het lijkt me beter iets over continue tralies in het algemeen te vertellen.
Zo'n 15 jaar geleden staken continue tralies voor het eerst de kop op, toen Dana Scott bezig was de berekenings- en informatietheorieën wiskundig te onderbouwen. Continue tralies bleken de verschijnselen die men daar tegenkomt uitstekend te modeleren, ook bleken ze modellen te vormen voor de λ-calculus.
Iets later kwamen anderen via topologische, algebraïsche en categorie-theoretische beschouwingen ook bij de continue tralies terecht.
Om te kunnen zeggen wat een continu tralie eigenlijk is eerst het volgende:
Zij T een tralie, dus een partiëel geordende verzameling waarin voor elke $x, y \in T$ sup $\{x, y\}$ en inf $\{x, y\}$ bestaan. We zeggen: x ligt ver onder y, in symbolen $x << y$, als het volgende geldt: telkens als D een naar boven gerichte verzameling in T is en als $y \leqslant \sup D$ dan $x \leqslant d$ voor een d uit D.
Een continu tralie is nu een orde volledig tralie waarin voor elke $y \in T$ $y = \sup \{x : x << y\}$.
Deze laatste eis maakt het begrip 'continue tralie' zeer sterk: de theorie is zeer rijk en er is weinig pathologie: het aantal volledige tralies dat niet continu is is op de vingers van een hand te tellen. Ook heeft het vele toepassingen, in de topologie, algebra, (theoretische) informatica enzovoort.
Wie meer wil weten over continue tralies kan ik het boek A Compendium of continuous lattices, Springer Verlag 1980; zeer aanraden. Het is geschreven door werkers van het eerste uur en bevat alle basisinformatie op het gebied van de continue tralies.

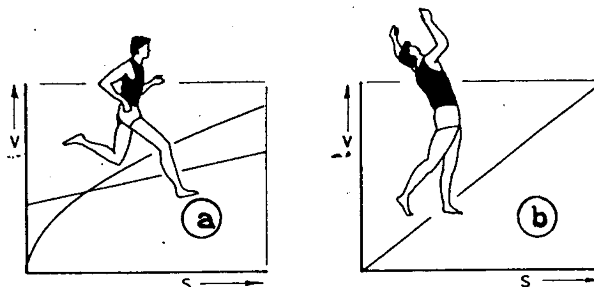
K. P. Hart

Sport en wiskunde

Oplossing loper 3
De vergelijking van de rechte luidt: $v = 0{,}16\,s$, waaruit volgt: $t = \frac{1}{0{,}16} \ln 0{,}16\,s +$ constante. Het zal u niet zijn meegevallen om deze constante te bepalen, zodanig dat voor $t = 0$ geldt $s = 0$.
U ziet in figuur 3[b] loper 3 wanhopige pogingen doen om uit de startblokken los te komen. Letten we eens op de startversnelling (toename van de snelheid per tijdseenheid). De versnelling is weer de afgeleide functie van de snelheid v naar de tijd t.

$$\text{Versnelling} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Voor de derde loper is de snelheid v bij de start gelijk aan nul en $\frac{dv}{ds} = 0{,}16$ (zie helling van de grafiek).
Het produkt van beide, zijnde de startversnelling, wordt dus nul! En als de snelheid nul is en de toename ook nog, vorderen we geen millimeter.
Kampioen wordt dus loper 2, op ruim 1 seconde gevolgd door loper 1. Loper 3 is niet eens vertrokken; hij wist geen weg met het schema dat de trainer hem had voorgelegd. Grafiek 3 is onmogelijk.
Wat over 100 m niet kan, lukt over een andere kortere afstand ook niet. De grafiek moet dus verticaal beginnen, zoals grafiek 1 doet.
Als de s, v-grafiek niet door de oorsprong gaat, ligt het anders (zie grafiek 2).
Opmerking: we stellen ons voor in een volgend artikel een echte 'sportgrafiek' onder handen te nemen, maar dat is dan geen parabool of rechte!



Figuur 3 Relaties tussen s en v.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Onlangs is in Euclides besproken Ross Honsberger, Mathematical Gems III (Euclides 62, nr. 9, blz. 270). Het is het vijfde boek dat van de hand van Rossberger verschijnt in de serie Dolciana Mathematical Expositions. Reeds aandacht in deze rubriek is geschonken aan de voorgaande boeken: Mathematical Gems I en II, Mathematical Plums en Mathematical Morsels. Wie ze bestellen wil, moet eraan denken dat ze in Europa verkrijgbaar zijn bij de uitgever John Wiley.
Graag wil ik aan dit fraaie boek meer bekendheid geven door er een paar problemen uit over te nemen.

577. Hieronder is op alle mogelijke manieren het getal 6 geschreven als som van positieve natuurlijke getallen. Erachter is geschreven het aantal *verschillende* getallen waaruit de som bestaat.

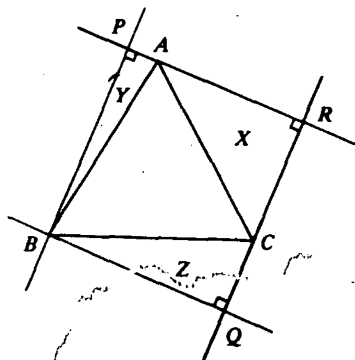
6	1
5 + 1	2
4 + 2	2
4 + 1 + 1	2
3 + 3	1
3 + 2 + 1	3
3 + 1 + 1 + 1	2
2 + 2 + 2	1
2 + 2 + 1 + 1	2
2 + 1 + 1 + 1 + 1	2
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1

De som van de getallen in de rechter kolom bedraagt 19. En het aantal getallen 1 in de linker kolom bedraagt eveneens 19.
Dat is geen toeval, maar blijft juist welk getal men ook voor 6 in de plaats kiest. Toon dat aan.

578. Beschrijf om de gelijkzijdige driehoek ABC een rechthoek $BPRQ$ (zie figuur 1). Bewijs dat voor de driehoeken X, Y en Z geldt: $X = Y + Z$.
Een simpele opgave. Ik probeerde het: een korte berekening en het was klaar. In vroeger tijden had een gemiddelde hbs'er er geen moeite mee gehad.

Er bleek een speciale reden te zijn dat deze opgave toch opgenomen was. In een correspondentie van de auteur met Prof. Dijkstra was dit probleem ter sprake gekomen. Prof. Dijkstra stuurde het zijn moeder, mevrouw B. C. Dijkstra-Kluyver (Zutphen). Van mevrouw Dijkstra heb ik vele malen opmerkingen en aanvullingen over deze rubriek gekregen en trouwe lezers kunnen zich haar naam nog herinneren. Zij vond een oplossing en deze was zo elegant dat de auteur deze een plaats in dit boek waardig achtte. Er werd niet in gerekend.
Vraag aan de lezers een oplossing te vinden die niet gebaseerd is op rekenwerk.
Omdat het weinig zin heeft belangstellenden een maand te laten wachten, vindt u de oplossing van mevrouw Dijkstra reeds in dit nummer afgedrukt.

579. Recreatie kan ook betekenen genieten van een oplossing die men zelf niet heeft kunnen vinden. Vandaar de volgende opgave. Algemeen bekend zijn de puzzels waarbij men natuurlijke getallen moet schrijven bijv. met behulp van vier cijfers 4. Moeilijker is echter het volgende.
Vind een methode om elk natuurlijk getal n te schrijven met behulp van de cijfers 0, 1, 2, ..., 9. Deze moeten elk precies één keer voorkomen, bij voorkeur in de natuurlijke volgorde.
Toegestane bewerkingen zijn optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken en het nemen van de logaritme.
Een ingenieuze oplossing vindt u verderop in dit nummer.



Figuur 1

Oplossingen

571. Positieve gehele getallen coderen we door ze eerst in het vijftallig stelsel te schrijven en daarna een bijectie toe te passen van $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ naar $\{V, W, X, Y, Z\}$.
We beperken ons tot getallen die vijftallig met drie cijfers geschreven worden. We geven dat
$VYZ < VYX < VWW < WXW < WVY$
Hoe schrijven we dan ZVW tientallig?
Uit de gegevens volgt dat
$Z < X,\ Y < V,\ V < W,\ X < V$
We krijgen voor V, W, X, Y, Z zo de volgende drie mogelijkheden:

V	W	X	Y	Z
3	4	2	0	1
3	4	1	2	0
3	4	2	1	0

Omdat Z niet gelijk aan 0 kan zijn, blijft alleen de eerste

mogelijkheid over. Zodat $ZVW = 134$ (vijftallig) $= 44$ (tientallig).
Wie direct opmerkt dat $Z \neq 0$, kan $Y < V$ missen, dus alleen geven:
$VYZ < VYX < WXW < WVY$

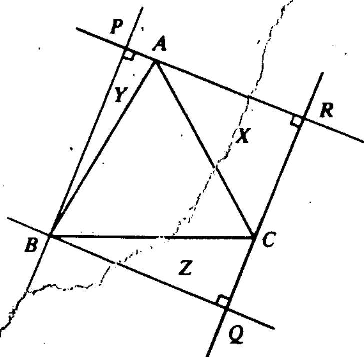
572

```
100 REM ################ oplossing recreatie opgave 572 ################
110 REM ############## niet die van de auteur ! ########################
120 DIM PIET#(2000) :PIET#(1)=1:AUKE%=0:BREUK#=19/87#
130 LPRINT CHR$(15)
140 LPRINT " Oplossing van recreatieopgave 572":PRINT:PRINT
160 LPRINT " 19/87 =";BREUK#:LPRINT
170 AUKE%=AUKE%+1:J%=2*AUKE%:PIET#(J%)=1+PIET#(AUKE%)
180 PIET#(J%+1)=1/PIET#(J%)
190 BIJNA#=PIET#(J%)-BREUK#  :IF BIJNA#<0 THEN BIJNA#=-BIJNA#
200 IF 1000000!*BIJNA#<1 GOTO 240
210 BIJNA#=PIET#(J%+1)-BREUK#:IF BIJNA#<0 THEN BIJNA#=-BIJNA#
220 IF 1000000!*BIJNA#<1 THEN LPRINT " t(";J%+1;")= "PIET#(J%+1):GOTO 240
230 GOTO 170
240 LPRINT " t(";J%; ")="PIET#(J%)
250 IF AUKE% = 0 THEN END
260 LPRINT " t(";AUKE%;")= "PIET#(AUKE%)  :IF AUKE%/2>INT(AUKE%/2) GOTO 280
270 AUKE%=AUKE%/2 :GOTO 250
280 AUKE%= AUKE%-1:GOTO 250
```

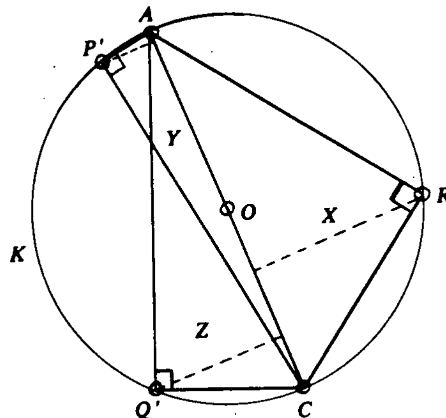
19/87 = .2183908045977012

t(1905) = .2183908045977012
t(1904) = 4.578947368421053
t(952) = 3.578947368421053
t(476) = 2.578947368421053
t(238) = 1.578947368421053
t(119) = .5789473684210526
t(118) = 1.727272727272727
t(59) = .7272727272727273
t(58) = 1.375
t(29) = .375
t(28) = 2.666666666666667
t(14) = 1.666666666666667
t(7) = .6666666666666667
t(6) = 1.5
t(3) = .5
t(2) = 2
t(1) = 1

578 Te bewijzen is: $X = Y + Z$.



Roteer om A zo dat het beeld van lijnstuk AB het lijnstuk AC is.
Het beeld van driehoek ABP is driehoek $AC'P$.
Roteer om C zo dat het beeld van lijnstuk CB het lijnstuk CA is.
Het beeld van driehoek CBQ is driehoek CAQ'.



De punten P', Q' en R liggen dan op de cirkel met middellijn AC.
Dus is
$X = Y + Z \Leftrightarrow$ de som van de afstanden van P' en Q' tot lijn $AC =$
$=$ de afstand van R tot lijn AC. (1)
In de oorspronkelijke figuur is $\angle RAP = 180°$. Geroteerd is over 60°. Dus is $\angle RAP' = 120°$.
Evenzo is $\angle RCQ' = 120°$.
Hieruit volgt dat driehoek $RP'Q'$ gelijkzijdig is. Het zwaartepunt van deze driehoek is punt O, het middelpunt van de cirkel. Plaats gelijke massa's in R, P' en Q'. Het systeem van deze massa's kan men ondersteunen door Q te ondersteunen, dus ook door een mesvormige ondersteuning van de middellijn AC. De som van de momenten van P' en Q' t.o.v. lijn AC is dus gelijk aan het moment van R t.o.v. deze lijn. Hieruit volgt direct (1).

579 De oplossing luidt:

$$^{\frac{0+1+2+3+4}{5}}\log\left({}^{\sqrt{\sqrt{\cdots(-6+7+8)}}}\log 9\right) = n$$

waarin het aantal worteltekens in het grondtal van de tweede logaritme n is.
Men ziet dit direct in door het linker lid te herleiden tot
$^{2}\log\left({}^{9^{1/2^n}}\log 9\right)$

Kalender

7 nov. 1987: Leiden, Nalezing wiskunde en informatica
9 jan. 1988: Amersfoort, Wintersymposium
23 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres



Verschenen: DEEL 4 VWO
In voorbereiding:
- Deel 5-vwo A en Deel 6-vwo A
- Deel 5-vwo B en Deel 6-vwo B

Verschenen: OPGAVEN EN MODELLEN voor Wiskunde A

WISKUNDE OP NIVEAU

- doet een beroep op de inventiviteit van de leerling
- geeft gestalte aan de veelzijdigheid van het nieuwe wiskunde-programma
- biedt levensechte toepassingen uit de economie, geografie, biologie en natuurkunde
- omvat het volledige examenprogramma
- biedt extra materiaal voor zowel individuele als projectachtige werkvormen.

WISKUNDE OP NIVEAU – OPGAVEN EN MODELLEN:
een apart boek dat vwo-leerlingen voorbereidt op het examen wiskunde A.
Met behulp van ca. 150 realistische modellen van uiteenlopend niveau worden eenvoudige wiskundige hulpmiddelen toegepast op dagelijkse problemen.
Het maken en lezen van grafieken speelt een grote rol.

Voor meer informatie of het aanvragen van een beoordelingsexemplaar kunt u contact opnemen met onze afdeling Verkoop/Voorlichting, telefoon 070-512711.



Nijgh & Van Ditmar Educatief
BADHUISWEG 232 2597 JS 's-GRAVENHAGE

Inhoud

Adressen van auteurs

Prof. dr. H. J. M. Bos, Math. Inst. R.U., Postbus 80010, 3508 Utrecht

Ir. H. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

H. J. Smid, T. H. Delft, Julianalaan 132, 2628 BL Delft

A. Verweij, T. H. Delft, Julianalaan 132, 2628 BL Delft

A. Zijlstra, Meerkoetmeen 50, 3844 XR Harderwijk

B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9", 1078 JX Amsterdam